COGNOME e NOME

N. MATRICOLA.....

Quesiti preliminari

Rispondere ad almeno 2 dei quesiti seguenti. Qualora non si risponda in maniera corretta ad almeno 2 dei quesiti, il compito verrà considerato insufficiente (e non verrà corretto il resto dell'elaborato).

Quesito 1. (V. 1 punto.)

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ con $n > 1$.

- (a) $A + {}^t A$ è una matrice simmetrica.
- (b) $A \cdot {}^t A$ è una matrice simmetrica.
- (c) $A - {}^t A$ è una matrice simmetrica.
- (d) $(A + I_n) \cdot ({}^t A + I_n)$ è una matrice simmetrica.

Quesito 2. (V. 1 punto.)

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ con $n > 1$.

- (a) Se i vettori colonna di A sono una base di $\mathbb{R}^n$ allora A è una matrice ortogonale.
- (b) Se i vettori colonna di A sono a due a due ortogonali allora A è una matrice ortogonale.
- (c) Se i vettori riga di A sono una base ortogonale allora A è una matrice invertibile.
- (d) Se i vettori riga di A sono linearmente indipendenti allora A è una matrice invertibile.

Quesito 3. (V. 1 punto.)

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ simmetrica che ammetta due autovalori distinti λ_1 e λ_2 :

- (a) Gli autovalori λ_1 e λ_2 sono reali.
- (b) Se v_1 , risp. v_2 , è un autovettore di A con autovalore λ_1 , risp. λ_2 , allora v_1 e v_2 sono ortogonali.
- (c) Se v_1 e v_2 sono due autovettori di A con medesimo autovalore λ_1 allora sono ortogonali.
- (d) Se v_1 e v_2 sono due autovettori di A con medesimo autovalore λ_1 allora non sono ortogonali.

Esercizio 1. (V. 2 punti.)

Dimostrare che se $v_1, \dots, v_k$ sono vettori non nulli ortogonali allora sono anche linearmente indipendenti.

Esercizio 2. (V. 3 punti.)

Trovare le radici (in $\mathbb{C}$) e decomporre in fattori il seguente polinomio:

$$p(z) = 2z^{2016} + 16z^{2014} - 2016z^{2012}$$

Esercizio 3. (V. 4 punti.)

Risolvere al variare di t in $\mathbb{R}$ il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + ty + tz + tw = t \\ tx + y + tz + tw = t \\ tx + ty + z + tw = t \\ tx + ty + tz + w = t \end{cases}$$

Esercizio 4. (V. 8 punti.)

Data la matrice A :

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica e geometrica.
- (b) Trovare, se esiste, una matrice $H \in GL_4$ tale che posto $D := H^{-1}AH$ si abbia D matrice diagonale.

Esercizio 5. (V. 5 punti.)

Definiamo al variare di $t \in \mathbb{R}$ i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$

$$T_t := \langle (1, 1, t, -t), (t, t, 1, -1), (1, 1, 1, -1) \rangle$$

$$W_t := \langle (t, 1, t, -1), (0, 1 - t, 0, 1 - t), (1, 1, 1, -1) \rangle$$

- (a) Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ si ha $\dim(T_t) = 3$?
- (b) Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ si ha $\dim(W_t) = 2$?
- (c) Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ si ha $T_t = W_t$?
- (d) Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ si ha $\dim(T_t \cap W_t) = 1$?
- (e) Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ si ha $\dim(T_t + W_t) = 4$?

Esercizio 6. (V. 8 punti.)

In $\mathbb{R}^3$ consideriamo i sottospazi vettoriali $W_1 = \langle (1, 1, 0) \rangle$ e $T_2 = \langle (1, 0, -1), (1, -1, 1) \rangle$, siano inoltre $T_1 := W_1^\perp$ e $W_2 := T_2^\perp$. In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ siano assegnati i punti $P_1 = (0, -3, 2)$ e $P_2 = (0, 1, 0)$ siano infine $r := P_1 + W_1$ e $\pi := P_2 + T_2$.

- (a) Trovare una base per T_1 .
- (b) Trovare una base per W_2 .
- (c) Gli spazi T_1 e T_2 sono diversi?
- (d) Determinare un sistema lineare minimale per T_1
- (e) Determinare un sistema lineare minimale per W_2
- (f) Determinare un'equazione cartesiana per π
- (g) Determinare due equazioni cartesiane per r
- (h) Determinare (se esistono) i punti di intersezione tra r e π .