Prova d'esame di

Fondamenti di algebra lineare e geometria (mat.disp.)

Laurea Triennale in Ingegneria dell'energia

06/07/2015

COGNOME e NOME ......VERONESE FABIO......

N. MATRICOLA......1095429......

Quesiti preliminari C

Rispondere ad almeno 2 dei quesiti seguenti. Qualora non si risponda in maniera corretta ad almeno 2 dei quesiti, il compito verrà considerato insufficiente (e non verrà corretto il resto dell'elaborato).

Quesito 1. (V. 1 punto.)
Fornire la definizione di matrici simili.

Date due matrici $E, F \in M_n(\mathbb{R})$ esse si dicono simili se $\exists H \in GL_n \mid E = H^{-1} F H$

Quesito 2. (V. 1 punto.)
Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ e per ogni λ autovalore di A.

(a) La molteplicità geometrica di λ è maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.

(b) La somma della molteplicità algebrica di λ e della sua molteplicità geometrica è uguale a n.

(c) La molteplicità algebrica di λ è minore o uguale a n

(d) La molteplicità geometrica di λ è maggiore o uguale a 1

Quesito 3. (V. 1 punto.)
Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$.

(a) A è una matrice ortogonale se e solo se ${}^tAA = I$.

(b) A è una matrice ortogonale se e solo se le righe di A formano una base di $\mathbb{R}^n$.

(c) A è una matrice ortogonale se e solo se le righe di A formano una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$.

(d) A è una matrice ortogonale se e solo se le righe di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 1. (V. 3 punti.)
Siano $A, O \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ due matrici con O matrice ortogonale, sia $D := O^{-1}AO$. Dimostrare che se D è una matrice diagonale allora A è una matrice simmetrica.

In primo luogo isolo A moltiplicando per O a sinistra ed O^{-1} a destra:

$$ODO^{-1} = O(O^{-1}AO)O^{-1} = A \qquad A = ODO^{-1}$$

Calcolo ora la trasposta di A:

$${}^tA = {}^t(ODO^{-1}) = {}^tO^{-1}\,{}^tD\,{}^tO$$

. Siccome per O ortogonale ${}^tO^{-1} = O$ e per D diagonale ${}^tD = D$:

$${}^tA = ODO^{-1} = A \qquad A = {}^tA$$

, cioè A è simmetrica.

Esercizio 2. (V. 2 punti.)
Sia $z = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$, trovare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a + bi = z^{2015}$.

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z^{2015} = e^{i\frac{\pi}{3}\cdot 2015} = e^{i\frac{\pi}{3}\cdot 2013} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\,670\pi} \cdot e^{i\pi} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} = 1 \cdot (-1) \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$= -\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Esercizio 3. (V. 4 punti.)
Dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{cases}$$

sia T lo spazio delle soluzioni e sia $W := T^{\perp}$. Determinare una base per T, una base per W, un sistema lineare minimale che abbia T come spazio delle soluzioni e un sistema lineare minimale che abbia W come insieme delle soluzioni.

Matrice associata:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{3,1}^{(-1)}]{H_{1,2}^{(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{3,2}^{(-1)}]{H_{3,2}^{(-\frac{1}{2})}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{1,2}^{(-1)}]{H_{3}^{(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{2,3}^{(-2)}]{H_{1,3}^{(-1)}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

- Sistema lin. minimale per T

$T = \{(0, -x_4, -2x_4, x_4) \mid x_4 \in \mathbb{R}\} = \langle (0\ -1\ -2\ 1) \rangle$

Base di T: $\{(0\ -1\ -2\ 1)\}$

- W: $-x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$ - Sistema lin. minimale per W

$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_2 + 2x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle (0012), (1000), (0101) \rangle$

Base di W:

$\{(0012), (1000), (0101)\}$

Esercizio 4. (V. 3 punti.)
Siano T e W i due sottospazi di $\mathbb{R}^4$ definiti da:
$T = \langle (4,4,-3,0), (4,3,-3,0), (4,-4,-3,0) \rangle$
$W = \langle (3,3,-4,0), (3,4,-4,0), (3,-3,-4,0) \rangle$.
Sia infine A la matrice associata alla proiezione ortogonale sullo spazio T.
(a) Stabilire se gli spazi T e W sono uguali.
(b) Trovare una base ortonormale per T.
(c) Calcolare i coefficienti della matrice A.

a) $T = W \iff$ T e W hanno stessa riduzione Gauss-Jordan:

$$T: \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{3,1}(-1)]{H_{2,1}(-1)} \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-8} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \xrightarrow[H_2(-1)]{H_{2,1}(4)} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\cdot\ T \neq W$

$$W: \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{3,1}(-1)]{H_{2,1}(-1)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-6} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{2,1}(-3)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\{(4\ 0\ -3\ 0)(0\ 1\ 0\ 0)\}$ Base di T · Sono già ortogonali tra loro:

- basta solo normalizzare: $\dfrac{(4\ 0\ -3\ 0)}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{1}{5}(4\ 0\ -3\ 0) \Rightarrow B_T = \left\{\left(\frac{4}{5}\ 0\ -\frac{3}{5}\ 0\right), (0\ 1\ 0\ 0)\right\}$ è ortonorm

c)
$$A: \begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \\ -3/5 \\ 0 \end{pmatrix} \left(4/5\ \ 0\ \ -3/5\ \ 0\right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0\ \ 1\ \ 0\ \ 0) = \begin{pmatrix} \frac{16}{25} & 0 & -\frac{12}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12}{25} & 0 & \frac{9}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 16 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. (V. 4 punti.)
Al variare di $t \in \mathbb{R}$ sia A_t la matrice seguente:

$$A_t := \begin{pmatrix} 6-t & 0 & t-3 \\ 2t-6 & t & 3-t \\ 3-t & 0 & t \end{pmatrix}$$

2 (a) Determinare gli autovalori di A_t e la loro molteplicità algebrica. (In funzione di t.)

2 (b) Per quali valori di t esiste una matrice $H \in GL_3$ tale che posto $D := H^{-1}AH$ si abbia D matrice diagonale?

a) calcolo $A - I\lambda$:

$$\begin{pmatrix} 6-t-\lambda & 0 & t-3 \\ 2t-6 & t-\lambda & 3-t \\ 3-t & 0 & t-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - I\lambda) = (6-t-\lambda)(t-\lambda)^2 + (3-t)^2(t-\lambda)$$
$$= (t-\lambda)\left[(6-t-\lambda)(t-\lambda) + (3-t)^2\right]$$
$$= (t-\lambda)\left[\cancel{6t} - 6\lambda - \cancel{t^2} + \cancel{\lambda t} - \cancel{\lambda t} + \lambda^2 + 9 - \cancel{6t} + \cancel{t^2}\right]$$
$$= (t-\lambda)(9 - 6\lambda + \lambda^2)$$
$$= (t-\lambda)(3-\lambda)^2$$

$\lambda_1 = t$ · molt. 1

$\lambda_2 = 3$ · molt. 2

b) Caso $t = 3$:

$\Rightarrow \det(A - I\lambda) = (3-\lambda)^3$

$$A: \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ ~~(A-3I)~~

Calcolo $V_3 \Rightarrow (A - I\cdot 3) = 0$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow V_3 : \langle (1\,0\,0)(0\,1\,0)(0\,0\,1) \rangle$ Molt. geom = Molt. alg = 3

$\Rightarrow$ Diagonalizz.

Caso $t \neq 3$:

Calcolo V_3: $\begin{pmatrix} 3-t & 0 & t-3 \\ 2t-6 & t-3 & 3-t \\ 3-t & 0 & t-3 \end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{\underbrace{t-3}_{\neq 0}} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

· $x = z$
· $y = -z$

$V_3 = \langle (1\,-1\,1) \rangle$

- molt. geom = 1
- molt. alg. = 2 ≠ 1
- Non è diagonalizz.

· A_t si diagonalizza per $t = 3$.

ed $H = H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 6. (V. 14 punti.)
In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ siano π_1 ed π_2 i seguenti piani:
$\pi_1 = P_1 + T_1$ con $P_1 = (1, 0, -1)$ e $T_1 = \langle(0, -1, 1), (1, 1, 0)\rangle$;
$\pi_2 = P_2 + T_2$ con $P_2 = (1, -1, 0)$ e $T_2 = \langle(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle$.
Siano inoltre $r = \pi_1 \cap \pi_2$, $W_1 = T_1^\perp$ e $W_2 = T_2^\perp$.
(a) Mostrare che i piani π_1 e π_2 non sono paralleli.
(b) Trovare una base per W_1 e una per W_2.
(c) Determinare delle costanti a, b, c e a', b', c' tali che: T_1 è lo spazio delle soluzioni di $ax+by+cz = 0$ e T_2 è lo spazio delle soluzioni di $a'x+b'y+c'z = 0$.
(d) Determinare le equazioni cartesiane per π_1 e π_2.
(e) Determinare (se esistono) un punto $P \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ ed un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $r = P + \langle v\rangle$.
(f) Determinare il fascio di piani Φ che ha come luogo fisso la retta r.
(g) Sia $P_3 = (1, -1, -1) \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Determinare, se esiste, un piano π_3 del fascio Φ passante per P_3.

a) Se Π_1, Π_2 non sono paralleli, la matrice $\begin{pmatrix} T_1 \\ \hline T_2 \end{pmatrix}$ ha Rk max:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ha Rk max $= 3$ Π_1, Π_2 non paralleli

b)

$$W_1: \begin{cases} -y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z=y \\ x=-y \end{cases} \quad B_{W_1}: \{(-1\ 1\ 1)\}$$

$$W_2: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad B_{W_2}: \{(0\ 0\ 1)\}$$

c) $T_1: -x+y+z=0$ $\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$ $T_2: z=0$ $\begin{cases} a'=0 \\ b'=0 \\ c'=1 \end{cases}$

d) $\Pi_1: -x+y+z=-2$

$\Pi_2: z=0$

e)

$$r\begin{cases} -x+y+z=-2 \\ z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2+x \\ z=0 \end{cases} \quad S: \{(x, -2+x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$= \underbrace{(0\ -2\ 0)}_{P \in A^3(\mathbb{R})} + \underbrace{\langle(1\ 1\ 0)\rangle}_{v \in \mathbb{R}^3}$$

f) $\phi \Rightarrow \alpha(-x+y+z+2)+\beta(z)=0$

g) Per π_3: $\alpha(\cancel{-1}\cdot\cancel{-1}, -1+2)+\beta\cdot(-1)=0$

$\alpha=-\beta$

Pongo $\alpha=1$, $\beta=-1$:

$\Rightarrow -x+y\cancel{+z}+2\cancel{-z}=0$

$\underline{x-y=2}$