Dimostrazioni da sapere
2014-2015

David Barbato

Proposizione 1. *Dato $z \in \mathbb{C}$ dimostrare che se $z \neq 0$ allora z è invertibile.*

Proposizione 2. *Siano $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Dimostrare che se per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$ vale*

$$\begin{pmatrix} \quad v \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ w \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad v \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ w \\ \\ \end{pmatrix}$$

allora $A = B$.

Teoerema 3 (Cauchy-Schwarz)**.** *Dimostrare che*

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad \textit{vale} \quad |v \cdot w| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

Teoerema 4 (Disuguaglianza triangolare)**.** *Dimostrare che*

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad \textit{vale} \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Proposizione 5. *Data la matrice $A \in M_{n,n}$ dimostrare che se*

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \textit{vale} \quad \|v\| = \left\| \begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ v \\ \\ \end{pmatrix} \right\|$$

allora A è un isometria. (Bisogna dimostrare che A conserva il prodotto scalare.)

Proposizione 6. *Dimostrare che se $v_1, \ldots, v_k$ sono vettori non nulli ortogonali allora sono anche indipendenti.*

Proposizione 7. *Siano $T \leq \mathbb{R}^n$, sia $\mathcal{B}_T = (v_1, \dots, v_k)$ una base ortonormale di T. Dato $w \in \mathbb{R}^n$ definiamo w_1 e w_2 nel seguente modo:*

$$\begin{aligned} w_1 &:= (w \cdot v_1)v_1 + \ldots + (w \cdot v_k)v_k \\ w_2 &:= w - w_1 \end{aligned}$$

dimostrare che
(a) $w_1 + w_2 = W$
(b) $w_1 \in T$
(c) $w_2 \in T^{\perp}$

Proposizione 8. *Sia A una matrice simmetrica di lato n a coefficienti reali. Se v_1 e v_2 sono due autovettori corrispondenti a due autovalori λ_1 e λ_2 distinti allora vale:*

$$\begin{pmatrix} \quad v_1 \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ v_2 \\ \\ \end{pmatrix} = 0$$

Corollario 9. *Utilizzando la proposizione 8, dimostrare che se A è una matrice simmetrica e a coefficienti reali allora ha tutti gli autovalori reali.*

Corollario 10. *Utilizzando la proposizione 8 e il corollario 9, dimostrare che se A è una matrice simmetrica e a coefficienti reali allora gli autospazi sono ortogonali tra di loro.*

Proposizione 11. *Siano $A, O \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ due matrice con O matrice ortogonale, sia $D := O^{-1}AO$. Dimostrare che se D è una matrice diagonale allora A è una matrice simmetrica.*