Esercizi 10
26\05\2015

David Barbato

Esercizio 1. *Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ la diagonalizzabilità della matrice A data da:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & k \end{pmatrix}$$

Posto $k = 6$ trovare se esiste, una matrice $H \in GL_2$ tale che posto $D := H^{-1}AH$ si abbia D matrice diagonale. Esiste una base ortonormale di vettori che diagonalizza A?

Esercizio 2. *Data la matrice A:*

$$A := \begin{pmatrix} k^2 & k^2 - 1 & 2k - k^2 \\ 1 - k^2 & 2 - k^2 & k^2 - 1 \\ 0 & 0 & 2k \end{pmatrix}$$

Per quali valori del parametro k la matrice A è diagonalizzabile? Esistono dei valori $k \in \mathbb{R}$ tali che la matrice A è simile a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. *Consideriamo la matrice A:*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2h & 2h \\ 2h & h + 1 & 0 \\ 2h & 0 & 1 - h \end{pmatrix}$$

(a) Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la matrice A è diagonalizzabile?
(b) Verificare che $\lambda_1 = 1$ è un autovalore di A.
(c) Calcolare il polinomio caratteristico di A.
(d) Determinare gli autovalori di A.(Utilizzare i risultati dei punti (b) e (c))
(e) Per quali valori di h la molteplicità algebrica di $\lambda_1 = 1$ è uguale a 1?
(f) Per i valori di h trovati al punto (e) determinare l'autovettore relativo a λ_1.
(g) Determinare una base ortonormale di autovettori per A.

Soluzioni

Esercizio 1 Il polinomio caretteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - (k+1)\lambda + k - 6$ il dicriminante del polinomio caratteristico è dato da: $\triangle = k^2 - 2k + 25$. E' facile verificare che $\triangle > 0$ per ogni valore di k, dunque il polinoimo caratteristico ha due radici reali distinte e la matrice A è diagonalizzabile per ogni k.
Se si pone k=6 allora la matrice diventa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 7$ e due autovettori sono $v_1 = (2, -1)$ e $v_2 = (1, 3)$ Non può esistere una base ortonormale di autovettori di A perché A non è simmetrica.

Esercizio 2
Il polinomio caratteristico di A è dato da:
$p(\lambda) = (2k - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (2k - \lambda)(\lambda - 1)^2$ Ci sono due casi che vanno considerati separatamente: $k = \frac{1}{2}$ e $k \neq \frac{1}{2}$.
CASO $k = \frac{1}{2}$. Se $k = \frac{1}{2}$ allora la matrice ha un solo autovalore $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica 3. La matrice $A - \lambda_1 I$ diventa:

$$A - \lambda_1 I := \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ricava facilmente il rango di $A - \lambda_1 I$ è uguale a 1 e molteplicità geometrica di λ_1 uguale 2 dunque per $k = \frac{1}{2}$ la matrice A non è diagonalizzabile.

CASO $k \neq \frac{1}{2}$. Se $k \neq \frac{1}{2}$ allora la matrice A ha due autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2k$ con molteplicità 2 ed 1. Perché A sia invertibile occorre e basta che la molteplicità geometrica di λ_1 sia uguale a 2. Occorre calcolare il rango di $A - \lambda_1 I$

$$A - \lambda_1 I := \begin{pmatrix} k^2-1 & k^2-1 & 2k-k^2 \\ 1-k^2 & 1-k^2 & k^2-1 \\ 0 & 0 & 2k-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k^2-1 & k^2-1 & 2k-k^2 \\ 1-k^2 & 1-k^2 & k^2-1 \\ 0 & 0 & 2k-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{2,1}(1)} \begin{pmatrix} k^2-1 & k^2-1 & 2k-k^2 \\ 0 & 0 & 2k-1 \\ 0 & 0 & 2k-1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda_1 I := \begin{pmatrix} k^2-1 & k^2-1 & 2k-k^2 \\ 1-k^2 & 1-k^2 & k^2-1 \\ 0 & 0 & 2k-1 \end{pmatrix}$$

Poiché $k \neq \frac{1}{2}$ allora $2k - 1 \neq 0$ dunque:

$$\xrightarrow{H_2(\frac{1}{2k-1})} \begin{pmatrix} k^2-1 & k^2-1 & 2k-k^2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2k-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{3,2}(1-2k)]{H_{1,2}(k^2-2k)} \begin{pmatrix} k^2-1 & k^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ci sono due casi se $k^2-1=0$ allora il rango di $A-\lambda_1 I$ è uguale a 1 quindi la molteplicità algebrica di λ_1 è uguale a 2 e la matrice è diagonalizzabile se $k^2-1\neq 0$ allora il rango di $A-\lambda_1 I$ è uguale a 2 quindi la molteplicità algebrica di λ_1 è uguale a 1 e la matrice non è diagonalizzabile. Quindi la matrice A è diagonalizzabile solo se $k^2-1=0$ cioè se $k\in\{1,-1\}$ La matrice A è simile alla matrice indicata dal testo se e solo se $k=1$.

Esercizio 3

(a) La matrice A è sempre diagonalizzabile perché è simmetrica.

(b) Basta calcolare il rango di $A-\lambda_1 I$.

$$A-\lambda_1 I := \begin{pmatrix} 0 & 2h & 2h \\ 2h & h & 0 \\ 2h & 0 & -h \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2h & 2h \\ 2h & h & 0 \\ 2h & 0 & -h \end{pmatrix} \xrightarrow[H_1(\frac{1}{2})]{H_{3,2}(-1)} \begin{pmatrix} 0 & h & h \\ 2h & h & 0 \\ 0 & -h & -h \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_{1,2}} \begin{pmatrix} 2h & h & 0 \\ 0 & h & h \\ 0 & -h & -h \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{1,2}(-1)]{H_{3,2}(1)} \begin{pmatrix} 2h & 0 & -h \\ 0 & h & h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per ogni valore di h il rango di $A-\lambda_1 I$ è minore di 3 dunque $\lambda_1=1$ è una autovalore di A. Si può anche notare che per $h=0$ il rango di $A-\lambda_1 I$ è uguale a zero e quindi la matrice A ha un solo autovalore co molteplicità 3. Questo risultato si poteva notare anche sostituendo direttamente $h=0$ nella matrice A e notando che così facendo si otteneva la matrice identità. Inoltre possiamo ancora notare che per $h\neq 0$ il rango di $A-\lambda_1 I$ è uguale a 2 dunque l'autovalore $\lambda_1=1$ ha molteplicità algebrica 1.

Infine dall'ultima matrice ottenuta possiamo trovare un autovettore per λ_1 risolvendo:

$$\begin{pmatrix} 2h & 0 & -h \\ 0 & h & h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

da cui ricaviamo per esempio l'autovettore $v_1=(1,-2,2)$.

(c) Per trovare il polinomio caratteristico di A dobbiamo calcolare il determinante di $A-\lambda I$, può essere utile per semplificare i calcoli sapere che $\lambda_1=1$ è una radice del polinomio caratteristico cioè $(1-\lambda)$ è un divisore del polinomio caratteristico.

$$p(\lambda)=(1-\lambda)(h+1-\lambda)(1-h-\lambda)-2h\cdot 2h(1-h-\lambda)-2h(h+1-\lambda)2h$$

sviluppiamo cercando di raccogliere un fattore $(1-\lambda)$

$$p(\lambda)=(1-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2-h^2)+4h^3-4h(1-\lambda)-4h^3-4h(1-\lambda)$$

$$p(\lambda)=(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1-9h^2)$$

$$p(\lambda)=(1-\lambda)(\lambda-1+3h)(\lambda-1-3h)$$

(d) Per $h = 0$ ha un solo autovalore $\lambda_1 = 1$ altrimenti ha tre autovalori distinti:$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + 3h$, $\lambda_3 = 1 - 3h$
(e) Per ogni h diverso da zero.
(f) Vedi questito (b). $v_1 = (1, -2, 2)$.
(g) $v_1 = \frac{1}{3}(1, -2, 2)$, $v_2 = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$, $v_3 = \frac{1}{3}(-2, 1, 2)$,