Esercizi 11
04\06\2015

David Barbato

Breve riepilogo di teoria
Consideriamo il sistema lineare:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \ldots \qquad\qquad \ldots \\ a_{k,1}x_1 + \ldots + a_{k,n}x_n = b_k \end{cases}$$

se il sistema ammette soluzione allora l'insieme delle soluzioni S è un sottospazio affine di R^n. $S = P + T$ con $P \in \mathbb{R}^n$ e $T \leq \mathbb{R}^n$. La decomposizione di S non è unica ma vale la seguente proposizione:

Proposizione 1. *Se $S_1 = P_1 + T_1$ e $S_2 = P_2 + T_2$ sono due sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$ allora vale la seguente relazione:*

$$S_1 = S_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad T_1 = T_2 \text{ e } P_2 - P_1 \in T_i$$

Sistemi lineari omogenei. Consideriamo ora un sottospazio vettoriale $T \leq \mathbb{R}^n$ ed il suo ortogonale $W = T^\perp$. Siano $v_1, \ldots, v_k$ e $w_1, \ldots, w_h$ vettori di $\mathbb{R}^n$ e sia $x = (x_1, \ldots, x_h)$, allora valgono le seguenti relazioni:

$$T = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle \quad \Longleftrightarrow W \text{ è lo spazio soluzione di } \begin{cases} v_1 \cdot x = 0 \\ \ldots \\ v_k \cdot x = 0 \end{cases}$$

$$W = \langle w_1, \ldots, w_h \rangle \quad \Longleftrightarrow T \text{ è lo spazio soluzione di } \begin{cases} w_1 \cdot x = 0 \\ \ldots \\ w_h \cdot x = 0 \end{cases}$$

inoltre se i vettori $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti e $T = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ allora $v_1, \ldots, v_k$ è una base di T e il sistema $\begin{cases} v_1 \cdot x = 0 \\ \ldots \\ v_k \cdot x = 0 \end{cases}$ è minimale tra i sistemi lineari che ammettono W come spazio delle soluzioni, (minimale nel senso che ha il numero minimo di equazioni). Lo stesso si può dire se $w_1, \ldots, w_h$ sono linearmente indipendenti ...

Sistemi lineari non omogenei. Siano $v_1, \ldots, v_k$ vettori di $\mathbb{R}^n$, sia $b \in \mathbb{R}^k$ e sia $x = (x_1, \ldots, x_h)$, consideriamo il sistema lineare non omogeneo seguente:

$$\begin{cases} v_1 \cdot x = b_1 \\ \ldots \\ v_k \cdot x = b_k \end{cases} \tag{1}$$

se il sistema (1) ammette soluzione allora l'insieme delle soluzioni S è dato da un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$, $S = P + T$ con $P \in \mathbb{R}^n$ e $T \leq \mathbb{R}^n$. Dove P è una qualunque soluzione del sistema (1) mentre T è lo spazio soluzione del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} v_1 \cdot x = 0 \\ \dots \\ v_k \cdot x = 0 \end{cases}$$

vale ancora

$$W = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \quad \Longleftrightarrow \quad W = T^\perp \ .$$

Esercizio 1. *Dato il sistema:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$$

sia T lo spazio delle soluzioni e sia $W := T^\perp$. Determinare una base per T, una base per W, un sistema lineare minimale che abbia T come spazio delle soluzioni e un sistema lineare minimale che abbia W come insieme delle soluzioni.

Esercizio 2. *Consideriamo il seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\ x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 2 \\ x_4 + 2x_5 &= 1 \\ x_1 + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_5 &= 3 \end{cases}$$

determinare se ammette soluzione. Determinare l'insieme S delle soluzioni ed un sistema minimale di equazioni lineari che ammette S come spazio affine delle soluzioni.

Esercizio 3. *Sia T_t al variare di $t \in \mathbb{R}$ lo spazio delle soluzioni del seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} x + ty + z &= 0 \\ x - ty - z &= 0 \\ x + y + tz &= 0 \end{cases}$$

sia $W_t := T_t^\perp$ determinare una base di W_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. *Risolvere il seguente sistema in $x, y, z \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} x + y^3 + z &= 1 \\ x + 2z &= 0 \\ x + y^3 - z &= 3 \end{cases}$$

Esercizio 5. *Consideriamo il seguente sistema nelle incognite $M \in \mathbb{R}$, $\theta_1, \theta_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:*

$$\begin{cases} M + (t^2 - 1)\tan(\theta_1) + t(\tan(\theta_2) - 1) + |t| &= 0 \\ (1 - t^2)\tan(\theta_1) - t\tan(\theta_2) - |t| &= 0 \\ M - t\tan(\theta_2) - |t|(1 + \tan(\theta_2)) &= 0 \end{cases}$$

stabilire al variare di t in $\mathbb{R}$ se ammette una, zero o infinite soluzioni.

Soluzioni

Esercizio 1 La matrice associata al sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

tramite operazioni elementari di riga applicando la riduzione di Gauss Jordan possiamo ridurci a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

siano $w_1 = (1, 0, -1, -1)$ e $w_2 = (0, 1, 1, 0)$ allora $\mathcal{B}_W := (w_1, w_2)$ è una base di W. Mentre T è lo spazio delle soluzioni del sistema minimale:

$$\begin{cases} w_1 \cdot x = 0 \\ w_2 \cdot x = 0 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{cases}$$

Dall'ultimo sistema possiamo ricavare $\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$ quindi

$T = \{(x_3 + x_4, -x_3, x_3, x_4) | x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$

$T = \langle (1, -1, 1, 0), (1, 0, 0, 1) \rangle$ posto $v_1 = (1, -1, 1, 0)$ e $v_2 = (1, 0, 0, 1)$ allora $\mathcal{B}_T := (v_1, v_2)$ è una base di T. Mentre W è lo spazio delle soluzioni del sistema minimale:

$$\begin{cases} v_1 \cdot x = 0 \\ v_2 \cdot x = 0 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_4 &= 0 \end{cases} \tag{2}$$

Per indicare che W è lo spazio delle soluzioni del sistema (2) avremmo potuto anche scrivere: $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^n | x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_4 = 0\}$.

Esercizio 2 La matrice associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

tramite operazioni elementari di riga applicando la riduzione di Gauss Jordan possiamo ridurci a:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

poiché non ci sono pivot sulla colonna dei termini noti allora il sistema ammette soluzione. Il sistema seguente

$$\begin{cases} x_1 - 2x_5 &= -1 \\ x_2 + x_3 + x_5 &= 3 \\ x_4 + 2x_5 &= 1 \end{cases}$$

è un sistema lineare minimale che ammette S come spazio delle soluzioni. Ci sono 3 pivot: x_1, x_2 e x_4. Mentre le variabili libere sono 2 x_3 e x_5. Dunque

$$\begin{cases} x_1 &= 2x_5 - 1 \\ x_2 &= -x_3 - x_5 + 3 \\ x_4 &= -2x_5 + 1 \end{cases}$$

$S = \{(2x_5 - 1, -x_3 - x_5 + 3, x_3, -2x_5 + 1, x_5) | x_3, x_5 \in \mathbb{R}\}$
$S = (-1, 3, 0, 1, 0) + \langle (0, -1, 1, 0, 0), (2, -1, 0, -2, 1) \rangle$

Esercizio 3 Il sistema lineare dell'esercizio può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} w_1 \cdot (x, y, z) = 0 \\ w_2 \cdot (x, y, z) = 0 \\ w_3 \cdot (x, y, z) = 0 \end{cases}$$

con $w_1 = (1, t, 1)$, $w_2 = (1, -t, -1)$, $w_3 = (1, 1, t)$. Dunque $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ per trovare una base bisogna trovare dei generatori indipendenti, (i vettori w_1, w_2, w_3 potrebbero essere o non essere indipendenti in funzione di t).

La matrice associata ai vettori è

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & -t & -1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

tramite operazioni elementari di riga possiamo ricondurci alla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1-t^2 \end{pmatrix}$$

ci sono almeno due pivot, mentre per il terzo bisogna capire se $1-t^2=0$ oppure $1-t^2 \neq 0$.
CASO $t=-1$. Se $t=-1$ allora $\mathcal{B}_{W_t} = ((1,0,0),(0,1,-1))$ è una base di W_t
CASO $t=1$. Se $t=1$ allora $\mathcal{B}_{W_t} = ((1,0,0),(0,1,1))$ è una base di W_t
CASO $t \notin \{-1,1\}$. Se $t \notin \{-1,1\}$ allora W_t ha dimensione 3 dunque $W=\mathbb{R}^3$ e una base è data da: $\mathcal{B}_{W_t} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$

Esercizio 4

Il sistema lineare in x, y, z non è lineare ma può diventare lineare ponendo $x_1 = x$, $x_2 = y^3$ e $x_3 = z$ (quindi $y = \sqrt[3]{x_2}$), da cui si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \end{cases}$$

risolvendo si ottiene $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, dunque $x = 2$, $y = 0$ e $z = 1$

Esercizio 5

Ponendo $x_1 = M$, $x_2 = \tan(\theta_1)$ e $x_3 = \tan(\theta_2)$ si ottiene un ottiene un sistema lineare dalla cui risoluzione si ricava:
Per $t \in \{(-\infty, 0) \cup \{1\}\}$ nessuna soluzione.
Per $t = 0$ infinite soluzioni : $M = 0$, $\theta_1 = 0$, $\forall \theta_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Per $t \in \{(0,1) \cup (1, \infty)\}$ soluzione unica: $M = t$, $\theta_1 = \arctan\left(\frac{t}{1-t^2}\right)$, $\theta_2 = 0$