

Esercizi 12

10\06\2015

David Barbato

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ consideriamo la retta r di equazione $x + y = 1$ ed il punto A di coordinate $(4, 1)$. Sia s la retta passante per A ed ortogonale ad r e sia B il punto di intersezione delle rette r ed s . Sia infine T la giacitura di r e sia $W := T^\perp$.

- (a) Scrivere r come sottovarietà lineare $r = P_1 + T$.
- (b) Scrivere un'equazione per T .
- (c) Trovare una base di T .
- (d) Scrivere un'equazione per W .
- (e) Trovare una base di W .
- (f) Scrivere s sotto forma $s = P_2 + W$.
- (g) Scrivere un'equazione per la retta s .
- (h) Calcolare le coordinate del punto B .
- (i) Quanto vale la distanza tra il punto A e la retta r ?

Esercizio 2. Nello spazio affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ consideriamo la retta r di equazione $x - 2y = 3$ ed il punto A di coordinate $(-1, 3)$. Sia s la retta passante per A ed ortogonale ad r e sia B il punto di intersezione delle rette r ed s . Sia infine T la giacitura di r e sia $W := T^\perp$.

- (a) Scrivere r come sottovarietà lineare $r = P_1 + T$.
- (b) Scrivere un'equazione per T .
- (c) Trovare una base di T .
- (d) Scrivere un'equazione per W .
- (e) Trovare una base di W .
- (f) Scrivere s sotto forma $s = P_2 + W$.
- (g) Scrivere un'equazione per la retta s .
- (h) Calcolare le coordinate del punto B .
- (i) Quanto vale la distanza tra il punto A e la retta r ?

Esercizio 3. Nello spazio affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ consideriamo la retta r di equazione $3x - 4y = 13$ ed il punto A di coordinate $(1, 3)$. Sia s la retta passante per A ed ortogonale ad r e sia B il punto di intersezione delle rette r ed s . Sia infine T la giacitura di r e sia $W := T^\perp$.

- (a) Scrivere r come sottovarietà lineare $r = P_1 + T$.
- (b) Scrivere un'equazione per T .
- (c) Trovare una base di T .
- (d) Scrivere un'equazione per W .
- (e) Trovare una base di W .

- (f) Scrivere s sotto forma $s = P_2 + W$.
- (g) Scrivere un'equazione per la retta s .
- (h) Calcolare le coordinate del punto B .
- (i) Quanto vale la distanza tra il punto A e la retta r ?

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ consideriamo il piano π di equazione $x + y + z = 1$ ed il punto A di coordinate $(2, 3, 2)$. Sia s la retta passante per A ed ortogonale ad π e sia B il punto di intersezione tra il piano π e la retta s . Sia infine T la giacitura di π e $W := T^\perp$.

- (a) Scrivere π come sottovarietà lineare $\pi = P_1 + T$.
- (b) Scrivere un'equazione per T .
- (c) Trovare una base di T .
- (d) Scrivere un sistema di equazioni lineari minimale per W .
- (e) Trovare una base di W .
- (f) Scrivere s sotto forma $s = P_2 + W$.
- (g) Scrivere un sistema di equazioni lineari minimale per la retta s .
- (h) Calcolare le coordinate del punto B .
- (i) Quanto vale la distanza tra il punto A e il piano π ?

Esercizio 5. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ consideriamo il piano π di equazione $2x + 6y + 3z = -4$ ed il punto A di coordinate $(3, 4, 5)$. Sia s la retta passante per A ed ortogonale ad π e sia B il punto del piano π di minima distanza dal punto A (B è il punto di intersezione tra il piano π e la retta s). Sia infine T la giacitura di π e $W := T^\perp$.

- (a) Scrivere π come sottovarietà lineare $\pi = P_1 + T$.
- (b) Scrivere un'equazione per T .
- (c) Trovare una base di T .
- (d) Scrivere un sistema di equazioni lineari minimale per W .
- (e) Trovare una base di W .
- (f) Scrivere s sotto forma $s = P_2 + W$.
- (g) Scrivere un sistema di equazioni lineari minimale per la retta s .
- (h) Calcolare le coordinate del punto B .
- (i) Quanto vale la distanza tra il punto A e il piano π ?

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ consideriamo il piano π di equazione $2x - y - 2z = 12$ ed il punto A di coordinate $(1, 2, 3)$. Calcolare la distanza tra il punto A ed il piano π . (Procedere come nell'esercizio precedente)

Esercizio 7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ consideriamo la retta r soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x - 2z = 11 \\ y = 1 \end{cases}$$

ed il punto A di coordinate $(-1, 0, 4)$. Sia π il piano passante per A ed ortogonale alla retta r e sia B il punto di intersezione tra il piano π e la retta r . Sia infine T la giacitura di r e $W := T^\perp$.

- (a) Scrivere r come sottovarietà lineare $\pi = P_1 + T$.
- (b) Scrivere un sistema di equazioni lineari minimale per T .
- (c) Trovare una base di T .
- (d) Scrivere un sistema di equazioni lineari minimale per W .
- (e) Trovare una base di W .
- (f) Scrivere π sotto forma $\pi = P_2 + W$.
- (g) Scrivere un sistema di equazioni lineari minimale per il piano π .
- (h) Calcolare le coordinate del punto B .
- (i) Quanto vale la distanza tra il punto A e la retta r ?

Esercizio 8. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ consideriamo la retta r soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - 3z = 9 \end{cases}$$

ed il punto A di coordinate $(3, 1, 4)$. Calcolare la distanza tra il punto A e la retta r . (Procedere come nell'esercizio 7)

Soluzioni

Esercizio 1 (a) I punti della r sono dati dalle soluzioni dell'equazione lineare $x + y = 1$. Ricavando x si ottiene $x = -y + 1$ dunque

$$r = \{(-y + 1, y) | y \in \mathbb{R}\} = (1, 0) + \{(-y, y) | y \in \mathbb{R}\} = (1, 0) + \langle(-1, 1)\rangle$$

dunque

$$P_1 = (1, 0) \quad \text{e} \quad T = \langle(-1, 1)\rangle$$

Prima di procedere può essere istruttivo effettuare un disegno che rappresenta sul piano i punti A e B e le rette r e s .

(b) L'equazione per T è data dalla parte omogenea dell'equazione di r quindi $x + y = 0$

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\}$$

(c) Una base di T è data dal vettore $(-1, 1)$.

(d) Per i punti (d) ed (e) si procede come nell'esercizio 1 del foglio 11. (Per ulteriori chiarimenti vedere anche la nota su sistemi lineari omogenei sempre del foglio 11.) Un'equazione per w è data dal prodotto scalare tra i vettori della base di T e il vettore delle ingognite (x, y) quindi

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -x + y = 0\}$$

(e)

$$W = \langle (1, 1) \rangle$$

(f) Sappiamo che la retta s passa per A e abbiamo già calcolato lo spazio W in (e) quindi

$$s = (4, 1) + \langle (1, 1) \rangle$$

(g) Sappiamo che l'equazione per W è $-x + y = 0$ dunque un'equazione per s sarà data da $-x + y = b$ con b da calcolare. Per trovare b basta imporre che la retta s passi per il punto $(4, 1)$. L'equazione per la retta s ottenuta è:

$$-x + y = -3$$

(h) Poiché il punto B deve appartenere ad entrambe le rette deve soddisfare le loro equazioni

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + y = -3 \end{cases}$$

risolvendo il sistema lineare si ottiene

$$B = (2, -1)$$

(i) A questo punto la distanza tra il punto A e la retta r è data semplicemente dalla distanza tra i punti A e B dunque

$$\text{dist}(A, r) = \|A - B\| = \sqrt{(4 - 2)^2 + (1 - (-1))^2} = 2\sqrt{2}$$

Esercizio 2

(a)

$$r = (3, 0) + \langle (2, 1) \rangle$$

(b)

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0\}$$

(c) Una base di T è data dal vettore $(2, 1)$.

(d)

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0\}$$

(e)

$$W = \langle (1, -2) \rangle$$

(f)

$$s = (-1, 3) + \langle (1, -2) \rangle$$

(g)

$$s = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \mid 2x + y = 1\}$$

(h)

$$B = (1, -1)$$

(i)

$$\text{dist}(A, r) = 2\sqrt{5}$$

Esercizio 3

(g)

$$s = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) | 4x + 3y = 13\}$$

(h)

$$B = (4, -1)$$

(i)

$$\text{dist}(A, r) = 5$$

Esercizio 4

La risoluzione dell'esercizio 4 è molto simile a quella degli esercizi precedenti ad eccezione del fatto che ci troviamo in uno spazio di dimensione 3 invece che 2.

(a) I punti del piano π sono dati dalle soluzioni dell'equazione lineare $x + y + z = 1$. Ricavando x si ottiene $x = -y - z + 1$ dunque

$$\begin{aligned}\pi &= \{(-y - z + 1, y, z) | y, z \in \mathbb{R}\} = (1, 0, 0) + \{(-y - z, y, z) | y, z \in \mathbb{R}\} \\ \pi &= (1, 0, 0) + \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle\end{aligned}$$

dunque

$$P_1 = (1, 0, 0) \quad \text{e} \quad T = \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$$

(b) Per la risoluzione dei quesiti (b),(c),(d) ed (e) si procede come nell'esercizio 1 del foglio 11. Molto utile per la comprensione è la lettura della nota su sistemi lineari omogenei sempre del foglio 11.

L'equazione per T è data dalla parte omogenea dell'equazione di π quindi $x + y + z = 0$

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y + z = 0\}$$

(c) Una base di T è data dai vettori $(-1, 1, 0)$ e $(-1, 0, 1)$.

(d) Un sistema lineare di equazione che descrivono w è data dal prodotto scalare tra i vettori della base di T ed il vettore delle incognite (x, y, z)

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -x + y = 0, -x + z = 0\}$$

(e)

$$W = \langle (1, 1, 1) \rangle$$

(f) Sappiamo che la retta s passa per A e abbiamo già calcolato lo spazio W in (e) quindi

$$s = (2, 3, 2) + \langle (1, 1, 1) \rangle$$

(g) In (d) abbiamo calcolato un sistema di equazioni minimali per W , un sistema per s sarà data da $-x + y = b_1$ e $-x + z = b_2$ con b_1 e b_2 da calcolare. Per trovare b basta imporre che la retta s passi per il punto $(2, 3, 2)$. Il sistema ottenuto è:

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

(h) Poiché il punto B deve appartenere sia alla retta s che al piano π allora deve soddisfare le loro equazioni

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y = 1 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

risolvendo il sistema lineare si ottiene

$$B = (0, 1, 0)$$

(i) A questo punto la distanza tra il punto A e il piano π è data semplicemente dalla distanza tra i punti A e B dunque

$$\text{dist}(A, \pi) = \|A - B\| = \sqrt{(2-0)^2 + (3-1)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{3}$$

Esercizio 5

(a)

$$\begin{aligned} \pi &= (-2, 0, 0) + \langle (-3, 1, 0), (-\frac{3}{2}, 0, 1) \rangle \\ \pi &= (-2, 0, 0) + \langle (-3, 1, 0), (-3, 0, 2) \rangle \end{aligned}$$

dunque

$$P_1 = (-2, 0, 0) \quad \text{e} \quad T = \langle (-3, 1, 0), (-3, 0, 2) \rangle$$

(b) $2x + 6y + 3z = 0$

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 6y + 3z = 0\}$$

(c) Una base di T è data dai vettori $(-3, 1, 0)$ e $(-3, 0, 2)$.

(d)

$$\begin{cases} -3x + y = 0 \\ -3x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -3x + y = 0, -3x + 2z = 0\}$$

(e)

$$W = \langle (2, 6, 3) \rangle$$

(f)

$$s = (3, 4, 5) + \langle (2, 6, 3) \rangle$$

(g)

$$\begin{cases} -3x + y = -5 \\ -3x + 2z = 1 \end{cases}$$

(h)

$$B = (1, -2, 2)$$

(i)

$$\text{dist}(A, r) = 7$$

Esercizio 6

$$\text{dist}(\pi, A) = 6$$

Esercizio 7

(a) I punti della retta r sono dati dalle soluzioni del sistema lineare. dopo aver risolto il sistema lineare si ottiene:

$$\begin{aligned} r &= \{(2z + 11, 1, z) | z \in \mathbb{R}\} = (11, 1, 0) + \{(2z, 0, z) | z \in \mathbb{R}\} \\ r &= (11, 1, 0) + \langle (2, 0, 1) \rangle \end{aligned}$$

dunque

$$P_1 = (11, 1, 0) \quad \text{e} \quad T = \langle (2, 0, 1) \rangle$$

(b) Per la risoluzione dei quesiti (b),(c),(d) ed (e) procede ancora in maniera simile a quanto fatto nel foglio 11.

Le equazioni per T sono date dalla parte omogenea delle equazioni di r quindi

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2z = 0, y = 0\}$$

(c) Una base di T è data dal vettore $(2, 0, 1)$.

(d) Un sistema lineare di equazione che descrivono w è data dal prodotto scalare tra i vettori della base di T ed il vettore delle incognite (x, y, z) , si tratta di una sola equazione,

$$2x + z = 0$$

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + z = 0\}$$

(e)

$$W = \langle (1, 0, -2), (0, 1, 0) \rangle$$

(f) Sappiamo che il piano π passa per A e abbiamo già calcolato lo spazio W in (e) quindi

$$s = (-1, 0, 4) + \langle (1, 0, -2), (0, 1, 0) \rangle$$

(g) In (d) abbiamo calcolato un sistema di equazioni minimali per W , un sistema per π sarà data da $2x + z = b_1$ con b da calcolare. Per trovare b basta imporre che il piano π passi per il punto $(-1, 0, 4)$. Il sistema ottenuto è costituito da una sola equazione:

$$2x + z = 2$$

(h) Poiché il punto B deve appartenere sia alla retta s che al piano π allora deve soddisfare le loro equazioni

$$\begin{cases} 2x + z = 2 \\ x - 2z = 11 \\ y = 1 \end{cases}$$

risolvendo il sistema lineare si ottiene

$$B = (3, 1, -4)$$

(i) A questo punto la distanza tra il punto A e la retta r è data semplicemente dalla distanza tra i punti A e B dunque

$$\text{dist}(A, r) = \|A - B\| = \sqrt{(4)^2 + (1)^2 + (-8)^2} = 9$$

Esercizio 8

$$\text{dist}(r, A) = 7$$