Esercizi 2
17\03\2015

David Barbato

Esercizio 1. *Quali dei seguenti sottoinsieme dello spazio vettoriale* $\mathbb{R}^3$ *sono sottospazi vettoriali? (Per ciascun insieme dimostrare che è un sottospazio vettoriale oppure mostrare con un esempio che non lo è.)*

(a) $A = \{(a,b,c) |\ a,b,c \in \mathbb{R},\ a+b = 2c\}$
(b) $B = \{(a,b,c) |\ a,b,c \in \mathbb{R},\ |a+b| = 2\}$
(c) $C = \{(a,b,c) |\ a,b,c \in \mathbb{R},\ a^2+b^2 = c\}$
(d) $D = \{(a,b,c) |\ a,b,c \in \mathbb{R},\ ab = c\}$
(e) $E = \{(a,b,c) |\ a,b,c \in \mathbb{R},\ a^2+b^2 = c^2\}$
(f) $F = \{(a,b,c) |\ a,b,c \in \mathbb{R},\ a = 0, b^2 = 0, c^3 = 0\}$
(g) $G = \{(a,b,c) |\ a,b,c \in \mathbb{R},\ (a^2+b^2)^2 = a^2+b^2,\ |a|+|b| < 1\}$

Esercizio 2. *Sia* $V = \mathbb{R}^3$ *spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ *con le usuali operazioni. Per ogni* $t \in \mathbb{R}$ *sia* $S_t := \{(0,t,0),(1,0,t),(0,t,1)\}$. *Per quali valori di* t *in* $\mathbb{R}$ *si ha:*

$$\langle S_t \rangle = V$$

Esercizio 3. *Sia* $V = \mathbb{R}^3$ *spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ *con le usuali operazioni. Sia* $S := \{(0,1,0),(2,1,1),(1,0,1),(0,-2,0),(3,3,3)\}$. *Determinare tutti i sottoinsiemi* T *di* S *composti da tre elementi tali che:*

$$\langle T \rangle = V$$

Esercizio 4. *Sia* $V = \mathbb{C}^2$ *spazio vettoriale su* $\mathbb{C}$ *con le usuali operazioni. Sia* $S := \{(1,1),(2,i),(1,0),(-2i,0),(0,0)\}$. *Dimostrare che* $\langle S \rangle = V$. *Determinare tutti i sottoinsiemi* T *di* S *composti da 2 elementi tali che:*

$$\langle T \rangle = V$$

Soluzioni

Esercizio 1
a) Si. Per dimostrare $A \leq V$ occorre verificare che $0_V \in A$ e che A è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalare.
b) No perché 0_V non appartiene a B.
c) No perché $(1,0,1)$ appartiene a C ma $2 \cdot (1,0,1) = (2,0,2)$ non appartiene a C.
d) No perché $(1,1,1)$ appartiene a D ma $2 \cdot (1,1,1) = (2,2,2)$ non appartiene a D.
e) No perché $(1,0,1)$ e $(-1,0,1)$ appartengono a E ma $(1,0,1) + (-1,0,1) = (0,0,2)$ non appartiene a E.
f) Si perché l'unico elemento di F è l'elemento neutro: $F = \{0_V\}$.
g) Si può dimostrare che vale $G := \{(0,0,c) | c \in \mathbb{R}\}$ e G è chiaramente uno spazio vettoriale.

Esercizio 2
Occorre provare a risolvere l'equazione:

$$(a,b,c) = \alpha \cdot (0,t,0) + \beta \cdot (1,0,t) + \gamma \cdot (0,t,1) \tag{1}$$

è necessario capire se per ogni $a,b,c \in \mathbb{R}$ esistano $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ che rendano vera l'uguaglianza 1? Proviamo a risolvere l'equazione 1.

$$(a,b,c) = (0,\alpha t,0) + (\beta,0,\beta t) + (0,\gamma t,\gamma)$$

$$(a,b,c) = (\beta, \alpha t + \gamma t, \beta t + \gamma)$$

ovvero

$$\begin{cases} a = \beta \\ b = \alpha t + \gamma t \\ c = \beta t + \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = a \\ \alpha t = b - ct + at^2 \\ \gamma = c - at \end{cases}$$

I casi $t = 0$ e $t \neq 0$ vanno analizzati separatamente. Per $t = 0$ si ha: $S_0 = \{(0,0,0),(1,0,0),(0,0,1)\}$ e chiaramente $(0,1,0) \notin \langle S_0 \rangle$ dunque

$$\langle S_0 \rangle \neq V$$

Se invece $t \neq 0$ allora nella seconda equazione del sistema possiamo dividere per t e otteniamo

$$\begin{cases} \beta = a \\ \alpha = \frac{b-ct+at^2}{t} \\ \gamma = c - at \end{cases}$$

dunque

$$\forall t \neq 0 \qquad \langle S_t \rangle = V$$

Esercizio 3
Ci sono 5 diversi sottoinsieme di T composti da 3 vettori che generano V:
$\{(0,1,0),(2,1,1),(1,0,1)\}$
$\{(0,1,0),(2,1,1),(3,3,3)\}$
$\{(2,1,1),(1,0,1),(0,-2,0)\}$
$\{(2,1,1),(1,0,1),(3,3,3)\}$
$\{(2,1,1),(0,-2,0),(3,3,3)\}$

Esercizio 4
Per dimostrare che S genera V è sufficiente mostrare che tutti gli elementi di V possono essere ottenuti come combinazione lineare degli elementi di S. Sia (z_1,z_2) un generico elemento di V per esempio vale $(z_1,z_2) = z_2\cdot(1,1)+(z_1-z_2)(1,0)$ dunque S genera V.
I sottoinsiemi di S di due elementi che generano V sono:
$\{(1,1),(2,i)\}$
$\{(1,1),(1,0)\}$
$\{(1,1),(-2i,0)\}$
$\{(2,i),(1,0)\}$
$\{(2,i),(-2i,0)\}$
Dimostreremo solo i casi $\langle\{(2,i),(1,0)\}\rangle = V$ e $\langle\{(1,0),(-2i,0)\}\rangle \neq V$. Cominciamo con la dimostrazione $\langle\{(2,i),(1,0)\}\rangle = V$. Sarà sufficiente mostrare che ogni vettore di V può essere scritto come combinazione lineare dei vettori $\{(2,i),(1,0)\}$. Sia (z_1,z_2) un generico elemento di V allora vale

$$(z_1,z_2) = \frac{z_2}{i}(2,i) + \left(z_1 - 2\frac{z_2}{i}\right)(1,0)\ .$$

Per mostrare invece che $\langle\{(1,0),(-2i,0)\}\rangle \neq V$ sarà sufficiente motrare un elemento di V che non è combinazione lineare dei vettori $\{(1,0),(-2i,0)\}$. È chiaro che il vettore $(0,1)$ non può essere ottenuto come combinazione lineare del vettori $\{(1,0),(-2i,0)\}$.