Esercizi 3
24\03\2015

David Barbato

Esercizio 1. *Quali dei seguenti sottoinsieme dello spazio vettoriale* $\mathbb{R}^4$ *sono basi?*

(a) $A = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$
(b) $B = \{(1,1,-1,2),(-1,1,1,1),(1,2,1,2),(1,-1,7,1),(1,-1,-7,1)\}$
(c) $C = \{(1,2,3,4),(2,3,4,5),(3,4,5,6),(4,5,6,7)\}$
(d) $D = \{(1,0,1,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$
(e) $E = \{(1,2,3,4),(-1,-2,-3,-4),(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$

Esercizio 2. *Per quali valori del paramentro reale* t*, l'insieme* $A := \{(t,2,0),(0,t+1,1),(-t^3,2t,2)\}$ *è una base dello spazio vettoriale* $\mathbb{R}^3$*?*

Esercizio 3. *Sia* $S := \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ *la base canonica di* $\mathbb{R}^4$*. A partire da ciascuno dei seguenti insiemi di vettori linearmente indipendenti, costruire una base utilizzando i vettori di* S*. (Per esempio nel quesito (a) occorre trovare una base che contenga* A *e sia contenuta in* $A \cap S$*).*
(a) $A = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0)\}$
(b) $B = \{(1,0,1,0)\}$
(c) $C = \{(1,0,1,1),(1,2,3,4),(0,1,2,3)\}$
(d) $D = \{(1,0,1,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$
(e) $E = \{\}$

Esercizio 4. *Estrarre (se possibile) da ciascuno dei seguenti insiemi una base di* $\mathbb{R}^3$*.*
(a) $A = \{(1,0,0),(1,1,0),(3,1,0),(1,2,3)\}$
(b) $B = \{(1,-1,0),(-1,0,1),(3,1,-4),(1,1,-2),(1,1,1)\}$

(c) $C = \{(1,-1,0),(-1,0,1),(-1,1,0),(1,-2,1)\}$
(d) $D = \{(1,-1,0),(-1,0,1),(1,0,0)\}$
(e) $E = \{(1,0,0),(-1,0,1)\}$

Esercizio 5. *Determinare la dimensione ed una base dei seguenti sottospazi di* $\mathbb{R}^3$.
(a) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - y = z\}$
(b) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - 3y + 7z = 0\}$
(c) $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 0, y + z = 0\}$

Esercizio 6. *Sono assegnati due sottospazi* W_1 *e* W_2*. Determinare la dimensione ed una base dei sottospazi* $W_1 \cap W_2$ *e* $W_1 + W_2$*. Indicare inoltre se la somma è diretta. (*`Sugg: può essere utile la formula di Grassman.`*)*
(a) $W_1 = \langle(1,2,1)\rangle, \quad W_2 = \langle(1,0,0),(0,0,1)\rangle$
(b) $W_1 = \langle(1,2,3)\rangle, \quad W_2 = \langle(2,3,4),(1,1,1)\rangle$
(c) $W_1 = \langle(1,0,1),(0,2,1)\rangle, \quad W_2 = \langle(1,0,0),(0,0,1)\rangle$

Esercizio 7. *Consideriamo lo spazio vettoriale* $V = M_3(\mathbb{R})$. *e il sottoinsieme seguente:*

$$W := \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} | a = e = i = 0, b + d = c + g = f + h = 0 \right\}$$

(a) Si verifichi che W *è un sottospazio di* V.
(b) Si determini la dimensione e una base di W.

Esercizio 8. *Sullo spazio vettoriale* $V = \mathbb{R}^2$ *consideriamo la base*

$$\mathcal{B} = \big((1,1),(1,-1)\big)$$

Determinare le coordinate dei seguenti punti rispetto alla base $\mathcal{B}$

(a) $(3,1)$
(b) $(-2,4)$.
(c) $(0,2)$.

Soluzioni

Esercizio 1
Per quanto visto a lezione $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 4 e A ne é la base canonica.
a) Si.
b) Non è una base perché è costituita da 5 elementi.
c) L'insieme C Non è una base perché non sono linearmente indipendenti, per esempio vale $v_2 - v_1 = v_4 - v_3$ oppure $v_3 = 2v_2 - v_1$.
d) Si l'insieme D è una base. Poiché sappiamo che $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 4 e D è costituito da 4 elementi per dimostrare che D è una base basterà mostrare o che sono linearmente indipendenti oppure che generano. METODO 1 bisogna risolvere $\lambda_1(1,0,1,0) + \lambda_1(1,0,1,0) + \lambda_1(1,0,1,0) + \lambda_1(1,0,1,0) = (0,0,0,0)$ e mostrare che l'unica soluzione è quella nulla. Passando al sistema si ha:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \\ \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\lambda_3 - \lambda_3 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \\ \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

METODO 2 bisogna mostrare che D genera $\mathbb{R}^4$ cioè $\langle D \rangle = \mathbb{R}^4$. Sarà sufficiente mostrare che $\langle D \rangle \supseteq A$ (poiché già sappiamo che A è una base). Poiché v_3 e v_2 appartengono a $\langle D \rangle$ allora

$$v_3 - v_2 = (1,1,1,0) - (1,1,0,0) = (0,0,1,0) \in \langle D \rangle$$

poiché sappiamo che v_1 e $(0,0,1,0)$ appartengono a $\langle D \rangle$ allora

$$v_1 - (0,0,1,0) = (1,0,0,0) \in \langle D \rangle$$

allo stesso modo

$$(1,1,0,0) - (1,0,0,0) = (0,1,0,0) \in \langle D \rangle$$

$$(1,1,1,1) - (1,1,1,0) = (0,0,0,1) \in \langle D \rangle$$

e) L'insieme E chiaramente non è una base perché
$(1,2,3,4) + (-1,-2,-3,-4) = 0$

Esercizio 2
$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

Esercizio 3
a) $\mathcal{B} = A \cup \{(0, 0, 0, 1)\}$
b) Ci sono due risposte possibili:
$\mathcal{B} = \{(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$
$\mathcal{B} = \{(1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$
c) Ci sono tre risposte possibili:
$\mathcal{B} = \{(1, 0, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (0, 1, 2, 3), (1, 0, 0, 0)\}$
$\mathcal{B} = \{(1, 0, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (0, 1, 2, 3), (0, 0, 1, 0)\}$
$\mathcal{B} = \{(1, 0, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (0, 1, 2, 3), (0, 0, 0, 1)\}$
mentre $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (0, 1, 2, 3), (0, 1, 0, 0)\}$ non è una base!
d) D è già una base senza bisogno di aggiungere ulteriori vettori.
e) $\mathcal{B} = S$

Esercizio 4
a) Ci sono tre risposte possibili
$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 2, 3)\}$
$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (3, 1, 0), (1, 2, 3)\}$
$\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (3, 1, 0), (1, 2, 3)\}$
b) Va bene qualunque combinazione di tre vettori purché contenga il vettore $(1, 1, 1)$.
c) Non è possibile estrarre una base dall'insieme C poiché l'insieme C non genera $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che C non genera...
d) D è già una base di R^3
e) Due soli vettori non possono essere sufficienti per generare $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5
La dimensione di un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ può essere uno dei seguenti valori $\{0, 1, 2, 3\}$.
a) Poiché $(1, 0, 0)$ non appartiene ad U allora $dim(U) \neq 3$.
Poiché $(1, 1, 0)$ appartiene ad U allora $dim(U) \neq 0$ dunque la dimesione di U è 1 o 2. è facile notare che per esempio i vettori $v_1 = (1, 1, 0)$ e $v_2 = (1, 0, 1)$ appartengono ad U e sono indipendenti. Dunque $dim(U) = 2$ e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ è una base.
b) Come per il punto a) $dim(W) = 2$ e per esempio una base è data da $\mathcal{B} = \{(3, 2, 0), (7, 0, -2)\}$.
c) Osserviamo innanzitutto che vale

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ z = x \end{cases}$$

dunque si ha:

$$T = \{(x, -x, x) | x \in \mathbb{R}\}$$

quindi $T = \langle(1, -1, 1)\rangle$, $dim(T) = 1$ e $\mathcal{B} = \{(1, -1, 1)\}$

Esercizio 6
a) $dim(W_1 \cap W_2) = 0$, $dim(W_1 + W_2) = 3$.
b) $W_1 \cap W_2 = W_1$ dunque $dim(W_1 \cap W_2) = 1$, $\quad W_1 + W_2 = W_2$ dunque $dim(W_1 + W_2) = 2$.
c) Cominciamo dallo studiare la somma $W_1 + W_2$. Consideriamo la base canonica di $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ è chiaro che $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$ appartengono a W_2 e quindi alla somma cos come il vettore $(0, 1, 0)$ in quanto vale $(0, 1, 0) = \frac{1}{2}((0, 2, 1) - (0, 0, 1))$ dunque $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$ e $dim(W_1 + W_2)$. Le dimensioni di W_1 e W_2 sono uguali a 2 quindi per il teorema di Grassman si ha $dim(W_1 \cap W_2) = 1$. Quindi basta trovare un elemento di $W_1 \cap W_2$ ed abbiamo finito. Notiamo che $(1, 0, 1)$ appartiene sia a W_1 che a W_2 dunque $\mathcal{B}_{W_1} = \{(1, 0, 0)\}$ è una base.

Esercizio 8
a) $(3, 1) = (2, 1)_{\mathcal{B}}$ $\quad$ b) $(-2, 4) = (1, -3)_{\mathcal{B}}$ $\quad$ c) $(0, 2) = (1, -1)_{\mathcal{B}}$