

Esercizi 4

01\04\2015

David Barbato

Riduzione a Gradini

Denotiamo le 3 operazioni elementari sulle righe viste a lezione nel seguente modo:

- $S_{i,j}$ Scambio della riga i con la riga j
- $H_i(\alpha)$ Moltiplicazione della riga i per $\alpha \neq 0$
- $H_{i,j}(\alpha)$ Somma alla riga i della riga j moltiplicata per $\alpha \neq 0$

Esercizio 1. Effettuare la riduzione di Gauss delle seguenti matrici:

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad (b) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (c) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Ridurre le seguenti matrici a scalini di modo tale che ciascun pivot sia uguale ad 1 e sia l'unico elemento non nullo della propria colonna. (Utilizzare solo le operazioni elementari di riga.)

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad (b) \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$(c) \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad (d) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$(e) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (f) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll}
(g) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ a^2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & (h) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ 0 & 1-a & -a & -a^2 \\ 1 & -1 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \\
(i) \quad \begin{pmatrix} 1+\pi & 0 & \pi+\pi^2 & 1 \\ \pi & 1 & 0 & 0 \\ \pi & 0 & \pi^2 & 1 \\ \pi & 2 & -\pi^2 & -1 \end{pmatrix} & (l) \quad \begin{pmatrix} a & a^2 & 1 & a^2 \\ 1 & a & -1 & 2a+a^2 \\ 1 & a & 0 & 2a \end{pmatrix}
\end{array}$$

Soluzioni

Esercizio 1

Occorre ridurre a scalini le seguenti matrici utilizzando le solo operazioni elementari di riga.

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{2,1}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_{1,2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{3,1}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{3,2}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{3,1}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{3,2}(\frac{2}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

(a) La soluzione è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

Uno svolgimento possibile è il seguente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{2,1}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 10 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{H_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{1,2}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

(b) Soluzione

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Uno svolgimento possibile:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{2,1}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{H_{3,1}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{3,2}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(e)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(f)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(g)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(h)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \pi & 0 \\ 0 & 1 & -\pi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(l)

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 1 & -a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$