

Esercizi 5

09\04\2015

David Barbato

Definizione 1. Una matrice si dice ridotta in forma di **Gauss Jordan** se è ridotta a scalini, ciascun pivot è uguale ad 1 ed è l'unico elemento non nullo della propria colonna. (Vedi esempi in foglio 4 esercizio 2.)

La matrice di Gauss Jordan è unica nel senso che vale la seguente proposizione:

Proposizione 1. *Date due matrici A e B allora le righe di A e di B generano lo stesso sottospazio vettoriale se e solo se le matrici A e B hanno la stessa riduzione di Gauss Jordan.*

Esercizio 1. *Individuare una base dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^n$. (Utilizzare il metodo di riduzione di Gauss)*

- (a) $W := \langle (2, 3, 1), (1, -6, -2), (-1, 3, 1) \rangle$
- (b) $W := \langle (1, 0, -1, 1), (0, 1, -2, -1), (4, 3, -2, -1) \rangle$
- (c) $W := \langle (1, 1, k^2 + k, k), (k, -1, 0, 0), (1, 0, k, 1), (0, k, k^3, k) \rangle$

Esercizio 2. *Dire se i seguenti sottospazi W e U di $\mathbb{R}^n$ sono uguali: (Utilizzare la proposizione 1.). Calcolare la dimensione ed una base di W e U .*

- (a) $W := \langle (2, 3, 1), (1, -6, -2), (-1, 3, 1) \rangle$
 $U := \langle (1, 21, 7), (-1, -6, -2), (7, 0, 0) \rangle$
- (b) $W := \langle (1, -2, 1, 0), (0, 1, 0, -1), (3, 4, -2, -5), (1, 1, 1, -3) \rangle$
 $U := \langle (1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, 0), (1, -1, 0, 0) \rangle$
- (c) $W := \langle (1, 2, 3, 4), (-1, -2, -3, -4) \rangle$
 $U := \langle (2, 3, 4, 5), (-2, -3, -4, -5) \rangle$
- (d) *Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i sottospazi W e U sono uguali? Calcolarne base e dimensione.*
 $W := \langle (k, 1, k+1, k), (k+1, -1, k, -k), (k, -1, k-1, -k), (1, 0, 1, 0) \rangle$
 $U := \langle (k+1, 1, 1+k^2+k^3, |k|), (1, 0, k^2, 0), (1, 1, 1+k^2, |k|) \rangle$
- (e) *Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i sottospazi W e U sono uguali? Calcolarne base e dimensione.*
 $W := \langle (1, k, -k, 0), (1, k, 0, 1) \rangle$
 $U := \langle (k+1, k^2+k, 0, k+1), (1, k, |k|, 2), (k, k^2, 0, k) \rangle$

Esercizio 3. Calcolare se possibile i seguenti prodotti tra matrici.

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$(e) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(f) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(g) \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(h) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Soluzioni

Esercizio 1

(a) Costruiamo la matrice che ha per righe i vettori generatori ed applichiamo il metodo di riduzione di Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{1,3}(-1)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[H_{2,1}(-1)]{H_{3,1}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{2,3}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_{2,3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 3, 1))$ è una possibile base di W .

(b) Una possibile base è data da: $\mathcal{B} = ((1, 0, -1, 1), (0, 1, -2, -1), (0, 0, 8, -2))$

(c) Una possibile base è data da: $\mathcal{B} = ((1, 0, k, 1), (0, 1, k^2, k-1), (0, 0, 0, 1))$

Esercizio 2

(a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 21 & 7 \\ -1 & -6 & -2 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque per la proposizione 1 si ha $W = U$. Inoltre $\dim(U) = 2$ ed una base è data da: $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, \frac{1}{3}))$

(b) $U = W$. $\dim(U) = 3$. Una base è data da: $\mathcal{B}_W = ((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1))$

(c) $U \neq W$. $\dim(W) = 1$. $\mathcal{B}_W = ((1, 2, 3, 4))$. $\dim(U) = 1$. $\mathcal{B}_U = ((1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}))$.

(d)

$$\begin{pmatrix} k & 1 & k+1 & k \\ k+1 & -1 & k & -k \\ k & -1 & k-1 & -k \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1+k^2+k^3 & |k| \\ 1 & 0 & k^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1+k & |k| \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & k^2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & |k| \end{pmatrix}$$

Le due matrici sono uguali se e solo se:

$$\begin{cases} k^2 = 1 \\ k = |k| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \pm 1 \\ k \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = 1$$

Dunque $W = U$ se e solo se $k = 1$. Inoltre $\dim(W) = 2$ ed una base è data da: $\mathcal{B}_W = ((1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, k))$. $\dim(U) = 2$ ed $\mathcal{B}_U = ((1, 0, k^2, 0), (0, 1, 1, |k|))$.

(e) Analizziamo prima W .

$$\begin{pmatrix} 1 & k & -k & 0 \\ 1 & k & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k & 1 \end{pmatrix}$$

bisogna considerare due casi se $k = 0$ allora sostituendo abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & k & -k & 0 \\ 1 & k & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se $k \neq 0$ invece

$$\begin{pmatrix} 1 & k & -k & 0 \\ 1 & k & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$$

Consideriamo lo spazio U

$$\begin{pmatrix} k+1 & k^2+k & 0 & k+1 \\ 1 & k & |k| & 2 \\ k & k^2 & 0 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & |k| & 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo prima il caso $k = 0$ sostituendo si ha: Le due matrici sono uguali se e solo se:

$$\begin{pmatrix} k+1 & k^2+k & 0 & k+1 \\ 1 & k & |k| & 2 \\ k & k^2 & 0 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se invece vale $k \neq 0$

$$\begin{pmatrix} k+1 & k^2+k & 0 & k+1 \\ 1 & k & |k| & 2 \\ k & k^2 & 0 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{|k|} \end{pmatrix}$$

Le matrici sono uguali se $k = 0$ oppure se $|k| = k$ cioè $k > 0$. Dunque

$$U = W \quad \Leftrightarrow k \geq 0$$

Inoltre $\dim(W) = 2$ ed una base è data da: $\mathcal{B}_W = ((1, k, 0, 1), (0, 0, k, 1))$.
 $\dim(U) = 2$ ed $\mathcal{B}_U = ((1, k, 0, 1), (0, 0, |k|, 1))$.

Esercizio 3

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 6 & -9 & -3 \\ -2 & 33 & 11 \\ 0 & -18 & -6 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

(c) le matrici non possono essere moltiplicate.

$$(d) \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$(e) \quad \begin{pmatrix} i & h & g \\ f & e & d \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

$$(f) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(g) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(g) \quad \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$