Esercizi 7
28\04\2015

David Barbato

Esercizio 1. *Calcolare il determinante delle seguenti matrici.*

$(a)\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$(b)\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$(c)\qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$(d)\qquad D = \begin{pmatrix} k & k^2 & k & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ k & k^2 & k & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

$(e)\qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(f)\qquad F = \begin{pmatrix} 21 & 4 & 2015 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(g)\qquad G = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

$(h)\qquad H = \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{pmatrix}$

$(l)\qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Breve riepilogo di teoria

Sia $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3)$ una base di $\mathbb{R}^3$, (con v_1, v_2, v_3 vettori di $\mathbb{R}^3$). Consideriamo un vettore w, vale $w = (w_1, w_2, w_3) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)_{\mathcal{B}}$ se e solo se

$$(w_1, w_2, w_3) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$$

Se B è la matrice che ha per vettori colonna i vettori della base $B := \left(\begin{pmatrix} \\ v_1 \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ v_2 \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ v_3 \\ \\ \end{pmatrix} \right)$ allora vale

$$B \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \\ v_1 \\ \\ \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \\ v_2 \\ \\ \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} \\ v_3 \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. *Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{R}^3$ costituita dai vettori nell'ordine $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 1, 4)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$. Calcolare le coordinate canoniche dei seguenti vettori:*
$(a) u = (0, 1, -1)_{\mathcal{B}}$
$(b) u = (1, -2, 1)_{\mathcal{B}}$
$(c) u = (1, 0, -7)_{\mathcal{B}}$

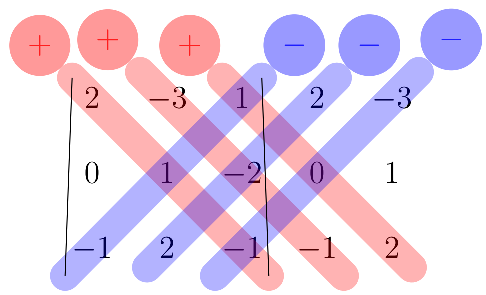
Esercizio 3. *Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{R}^3$ costituita dai vettori nell'ordine $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 1, 4)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$. Calcolare le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ dei seguenti vettori:*
$(a) u = (1, 1, 1)$
$(b) u = (1, 0, 1)$
$(c) u = (1, 2, -4)$

Soluzioni

Esercizio 1

(a) Utilizzando la regola di Sarrus

$$\left|\begin{array}{rrr|rr} 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right.$$



$$\det(A) = 2\cdot 1\cdot(-1) + (-3)\cdot(-2)\cdot(-1) + 1\cdot 0\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot(-1) - 2\cdot(-2)\cdot 2 - (-3)\cdot 0\cdot(-1)$$
$$\det(A) = -2 + (-6) + 0 - (-1) - (-8) - 0 = 1$$

(b) $\det(B) = -1$

(c) C Non é una matrice quadrata! Il determinante è definito solo per le matrici quadrate.

(d) Procediamo dapprima semplificando la matrice con le operazioni elementari che non modificano il determinante

$$D = \begin{pmatrix} k & k^2 & k & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ k & k^2 & k & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{3,1}(-1)]{H_{4,2}(-2)} \begin{pmatrix} k & k^2 & k & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[H_{4,3}(2)]{\substack{H_{1,3}(-1) \\ H_{2,3}(-3)}} \begin{pmatrix} k & k^2 & k & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{2,4}\left(\frac{1}{4}\right)]{H_{1,4}(-k^2/4)} \begin{pmatrix} k & 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{1,2}(-k)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2k & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_{1,2}]{S_{3,4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2k & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ricordando che gli scambi di riga cambiano il segno del determinante si ha:

$$\det(D) = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -8k$$

(e) $\det(E) = 0$

(f) $\det(F) = 1$

(g) $\det(G) = 1$

(h) $\det(H) = 4$

(l) $\det(L) = 8$

Esercizio 2

(a) $u = (0, 1, 3)$
(b) $u = (1, 0, -4)$
(c) $u = (1, 2, -4)$

Esercizio 3

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) $u = (1, -1, 2)$
(b) $u = (1, -2, 6)$
(c) $u = (1, 0, -7)$