Esercizi 8
05\05\2015

David Barbato

Esercizio 1. *Sia* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *un'applicazione lineare. Sia* $\mathcal{B}_1$ *la base di* $\mathbb{R}^3$ *costituita dai vettori nell'ordine* $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (1, -1, 0)$ *e* $u_3 = (-1, -1, 1)$ *e sia* $\mathcal{B}_2$ *la base di* $\mathbb{R}^2$ *costituita dai vettori nell'ordine* $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (2, 1)$. *Sia infine*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice associata ad f *rispetto alle basi canoniche. Calcolare i coefficienti della matrice* $A^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(f)$.

Esercizio 2. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *un'applicazione lineare. Sia* $\mathcal{B}$ *la base di* $\mathbb{R}^2$ *costituita dai vettori nell'ordine* $u_1 = (1, 2)$, $u_2 = (3, 5)$. *Sia infine*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

la matrice associata ad f *rispetto alla base canonica. Calcolare i coefficienti della matrice* $A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$.

Esercizio 3. *Si considerino i vettori* $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ *e* $v_3 = (1, 1, 1)$. *Determinare (se esiste) la matrice* A *associata ad un'applicazione* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tale che* $f(v_1) = (1, 0)$, $f(v_2) = (2, 0)$ *e* $f(v_3) = (3, 0)$. *Determinare la dimensione del nucleo di* f *e dell'immagine di* f.

Esercizio 4. *Si considerino i vettori* $v_1 = (1, 0, 0)$ *e* $v_2 = (0, 1, 0)$ *di* $\mathbb{R}^3$. *Esiste un'applicazione* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tale che* $f(v_1) = (2, 0)$, *e* $f(v_2) = (0, 3)$? *Se tale applicazione esiste, determinare la matrice* A *associata ad essa. Determinare la dimensione del nucleo e dell'immagine dell'applicazione* f *ottenuta.*

Esercizio 5. *Si considerino i vettori* $v_1 = (1, 0, 3, 0)$ $v_2 = (1, 1, 5, 0)$ *e* $v_3 = (0, 1, 2, 1)$ *di* $\mathbb{R}^4$. *Esiste un'applicazione* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ *tale che* $f(v_1) = (2, 0)$, $f(v_2) = (0, 3)$ *e* $f(v_3) = (0, 4)$? *Se tale applicazione esiste, determinare la matrice* A *associata ad essa.*

Soluzioni

Esercizio 1
$A_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
Esercizio 2
$A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
Esercizio 3
Sia $B := \left(\begin{pmatrix} \\ v_1 \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ v_2 \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ v_3 \\ \\ \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
La matrice B è invertibile la sua inversa è data da:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

il rango di B è uguale a tre, le colonne sono linearmente indipendenti e $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Dunque vale:
$f(v_1) = (1, 0)$
$f(v_2) = (2, 0)$
$f(v_3) = (3, 0)$
Se $\mathcal{C}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$ allora vale $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ infine

$$A = I_d A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} B^{-1} = A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$dim(f(\mathbb{R}^3)) = Rank(A) = Rank(A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}) = 1$ per il teorema di Grassman vale
$dim(f(\mathbb{R}^3)) + dim(ker(f)) = 3$ dunque $dim(ker(f)) = 2$

Esercizio 4
A differenza dell'esercizio precedente, in questo esercizio, i vettori v_1 e v_2 non sono una base di $\mathbb{R}^3$. Osserviamo peró che sono linearmente indipendenti quindi è possibile completare la base aggiungendo un altro vettore v_3 indipendente dai precedenti. Ci sono tantissime scelte possibili, una per esempio è data da $v_3 := (0, 0, 1)$. In questo modo (v_1, v_2, v_3) è una base, per la precisione, è la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Per completare l'esercizio dobbiamo assegnare un valore a $f(v_3)$, possiamo scegliere un qualunque elemento di $\mathbb{R}^2$, per semplicitá scegliamo $f(v_3) = (0, 0)$. Allora si ha:
$f((1, 0, 0)) = (2, 0)$
$f((0, 1, 0)) = (0, 3)$
$f((0, 0, 1)) = (0, 0)$
Dunque

$$A(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$dim(imm(f)) = 2$ e $dim(ker(f)) = 1$

Esercizio 5

I vettori v_1, v_2 e v_3 non sono chiaramente una base di $\mathbb{R}^4$. Cerchiamo di capire se sono linearmente indipendenti utlizzando la riduzione di Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Gauss-Jordan} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice ottenuta dai tre vettori è tre, dunque sono linearmente indipendenti. A questo punto ci sono tantissimi vettori v_4 che mi permettono di completare la base. Osserviamo ora che lo spazio generato dai vettori riga è lo stesso prima e dopo la riduzione di Gauss-Jordan dunque un vettore v_4 che ci permette di completare la base è $v_4 = (0, 0, 1, 0)$, (abbiamo aggiunto il pivot che mancava!). Adesso $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3, v_4)$ è una base di $\mathbb{R}^4$. Assegniamo un valore a nostra scelta a $f(v_4)$, per esempio $f(v_4) = (0, 0)$. Allora si ha:

$f(v_1) = (2, 0)$
$f(v_2) = (0, 3)$
$f(v_3) = (0, 4)$
$f(v_4) = (0, 0)$

Dunque

$$A^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Per trovare la matrice A associata ad f rispetto alle basi canoniche occorre calcolare l'inversa della matrice associata alla base $\mathcal{B}$:

$$B := \left(\begin{pmatrix} \\ v_1 \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ v_2 \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ v_3 \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ v_4 \\ \\ \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Gauss-Jordan} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

dunque

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = A^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$