

Esercizi 9

12\05\2015

David Barbato

Esercizio 1. *Data la matrice A :*

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Trovare, se esiste, una matrice $H \in GL_3$ tale che posto $D := H^{-1}AH$ si abbia D matrice diagonale.

Esercizio 2. *Diagonalizzare, se possibile, la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. *Discutere al variare di $t \in \mathbb{R}$ la diagonalizzabilità della matrice A data da:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ t & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. *Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da:*

$$f(x, y, z) = (y - z, x + 2z, 2z)$$

si determini, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f .

Esercizio 5. *Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la seguente matrice è diagonalizzabile?*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -t \\ 0 & t & 0 & 2t - t^2 \\ 0 & t - 2 & 2 & 2t - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzioni

Esercizio 1

$\det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)$. Il polinomio caratteristico ha 3 autovalori reali distinti con molteplicità algebrica 1. Dunque la matrice A è diagonalizzabile. Siano $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -2$ i tre autovalori. Gli autospazi V_{λ_j} sono uguali al $\ker(A - \lambda_j I)$. Per $j = 1$ bisogna risolvere il sistema

$$(A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

risolvendo il sistema lineare omogeneo si ottiene

$$V_{\lambda_1} = \{(t, t, t) | t \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 1) \rangle$$

Per $j = 2$ si ha $\lambda_j = -1$ e dunque bisogna risolvere

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

risolvendo il sistema lineare omogeneo si ottiene

$$V_{\lambda_2} = \{(t, t, 0) | t \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 0) \rangle$$

Infine per $j = 3$ si ha $\lambda_j = -2$ e dunque bisogna risolvere

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

risolvendo il sistema lineare omogeneo si ottiene

$$V_{\lambda_3} = \{(2t, t, 0) | t \in \mathbb{R}\} = \langle (2, 1, 0) \rangle$$

tre autovettori relativi agli autovalori λ_1 , λ_2 e λ_3 sono dati da: $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (2, 1, 0)$. (la scelta degli autovettori chiaramente non è l'unica possibile.) Posto

$$B := \left(\begin{pmatrix} v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si ha

$$B^{-1} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$. Il polinomio caratteristico ha un solo autovalore $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica 2. Si ricava facilmente $Rango(A - \lambda_1 I) = 1$ dunque la molteplicità geometrica di λ_1 è uguale ad 1 ed A non è diagonalizzabile poiché la molteplicità geometrica è minore della molteplicità algebrica..

Esercizio 3

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2t$. Da cui ponendo il polinomio uguale a zero si ricava:

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{1 + 8t}}{2}$$

Bisogna considerare separatamente i casi $1 + 8t > 0$, $1 + 8t < 0$ e $1 + 8t = 0$.

Se $1 + 8t > 0$ cioè $t > -\frac{1}{8}$ allora ci sono due autovalori distinti con molteplicità algebrica 1 e dunque A è diagonalizzabile.

Se $1 + 8t < 0$ cioè $t < -\frac{1}{8}$ allora ci sono due autovalori distinti complessi con molteplicità algebrica 1 e dunque A è diagonalizzabile solo su $\mathbb{C}$.

Se infine $1 + 8t = 0$ cioè $t = -\frac{1}{8}$ allora la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{8} & 2 \end{pmatrix}$$

con autovalore $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ la matrice $A - \lambda_1 I$ diventa:

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$Rango(A - \lambda_1 I) = 1$ e dunque poiché la molteplicità geometrica di λ_1 è uguale ad uno mentre quella algebrica è 2 allora A non è diagonalizzabile.

Esercizio 4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(-1 - \lambda)$. Il polinomio caratteristico ha tre autovalori distinti $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$ con molteplicità algebrica 1. Risolvendo il sistema

$$(A - \lambda_j I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

si ricavano tre autovettori $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ e $v_3 = (1, -1, 0)$.

Esercizio 5 $t = -1$