Prova d'esame di

Fondamenti di algebra lineare e geometria (mat.disp.)

Laurea Triennale in Ingegneria dell'energia

17/06/2016

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA..

Quesiti preliminari di teoria

Sono ammessi al più 3 errori su 12. Qualora non si diano almeno nove risposte corrette su 12 il compito verrà considerato insufficiente (e non verrà corretto il resto dell'elaborato). Il punteggio associato ai quesiti è 3 meno il numero di domande sbagliate.

Quesito 1.

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni W_1, W_2 sottospazi vettoriali di $V = \mathbb{R}^4$.

(a) Se $dim(W_1) = dim(W_2) = 1$ allora $dim(W_1 \cap W_2) = 1$

(b) Se $dim(W_1) = dim(W_2) = 1$ allora $dim(W_1 + W_2) \leq 2$

(c) Se $W_1 + W_2 = V$ allora $dim(W_1) + dim(W_2) = 4$

(d) Se $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ allora $dim(W_1) + dim(W_2) \leq 4$

Quesito 2. (V. 1 punto.)

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ con $n > 1$.

(a) Se la matrice A ha due colonne uguali allora $det(A) \neq 0$.

(b) Se la matrice A ha n colonne distinte e non nulle allora $det(A) \neq 0$.

(c) Se le righe di A sono linearmente indipendenti allora $det(A) \neq 0$.

(d) Se l'applicazione lineare associata ad A è bigettiva allora. $det(A) \neq 0$

Quesito 3. (V. 1 punto.)

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ simmetrica che ammetta due autovalori distinti λ_1 e λ_2:

(a) Gli autovalori λ_1 e λ_2 sono reali.

(b) Se v_1, risp. v_2, è un autovettore di A con autovalore λ_1, risp. λ_2, allora v_1 e v_2 sono ortogonali.

(c) Se v_1 e v_2 sono due autovettori di A con medesimo autovalore λ_1 allora sono ortogonali.

(d) Se v_1 e v_2 sono due autovettori di A con medesimo autovalore λ_1 allora non sono ortogonali.

Esercizio 1. (V. 2 punti.)

Teorema (Cauchy-Schwarz)**.** *Dimostrare che*

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad \textit{vale} \quad |v \cdot w| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

Esercizio 2. (V. 2 punti.)
Sia $z = \frac{(i-1)^{2016}}{2^{1000}}$.
Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $z = a + bi$.

Esercizio 3. (V. 5 punti.)
Risolvere al variare di k in $\mathbb{R}$ il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2kx + (1-k)y + z & = & k \\ -3kx + (k-1)y + z & = & 1 \\ kx - z & = & -1 \end{cases}$$

indicare in maniera chiara i valori di k per i quali non ci sono soluzioni, i valori di k per i quali la soluzione è unica e i valori di k per i quali ci sono infinite soluzini. Per i valori di k per i quali c'è una sola soluzione calcolarla, infine per i valori di k per i quali le soluzioni sono infinite, trovare lo spazio affine delle soluzioni.

Esercizio 4. (V. 6 punti.)
Data la matrice A:

$$A := \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ -4 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica e geometrica.

(b) Determinare gli autovettori di A.

(c) Trovare, se esiste, una matrice $H \in GL_4$ tale che posto $D := H^{-1}AH$ si abbia D matrice diagonale.

Esercizio 5. (V. 4 punti.)
Siano $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ due base di $\mathbb{R}^4$. Supponiamo che valgano le seguenti relazioni.

$$\begin{aligned}
v_1 &= (1, 0, 0, -1)_{\mathcal{B}_2} \\
v_2 &= (0, 2, 1, 1)_{\mathcal{B}_2} \\
v_3 &= (1, 1, 0, 1)_{\mathcal{B}_2} \\
v_4 &= (0, 1, 1, 0)_{\mathcal{B}_2}
\end{aligned}$$

(a) Calcolare la matrice $A_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ di cambio di coordinate da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.
(b) Calcolare la matrice $A_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$ di cambio di coordinate da $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.

Esercizio 6. (V. 12 punti.)
In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ siano $P_1 := (0, 2, 4)$, $P_2 := (0, -1, 1)$ punti. $T_1 := \langle(1, 0, 1)\rangle$ e $T_2 := \langle(1, 2, 0)\rangle$ siano sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Siano $W_1 := T_1^{\perp}$ e $W_2 := T_2^{\perp}$. Siano π_1 ed π_2 i piani passanti rispettivamente per P_1 e P_2 ortogonali rispettivamente a T_1 e T_2. E infine siano r_1 e r_2 le rette ortogonali rispettivamente a π_1 e π_2 e passanti rispettivamente per i punti P_1 e P_2.
(a) Mostrare che i piani π_1 e π_2 non sono paralleli.
(b) Trovare un'equazione per i piani π_1 e π_2.
(c) Trovare delle equazioni parametriche per i piani π_1 e π_2.
(d) Trovare una base per W_1 e una per W_2.
(e) Determinare dei vettori v_1 e v_2 tali che $r_1 = P_1 + \langle v_1\rangle$ e $r_2 = P_2 + \langle v_2\rangle$.
(f) Calcolare la distanza tra le rete r_1 e r_2.