Prova d'esame di

Fondamenti di algebra lineare e geometria (mat.disp.)

Laurea Triennale in Ingegneria dell'energia

17/06/2016

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA..

Quesiti preliminari di teoria

Sono ammessi al più 3 errori su 12. Qualora non si diano almeno nove risposte corrette su 12 il compito verrà considerato insufficiente (e non verrà corretto il resto dell'elaborato). Il punteggio associato ai quesiti è 3 meno il numero di domande sbagliate.

Quesito 1.
Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni W_1, W_2 sottospazi vettoriali di $V = \mathbb{R}^4$.

(a) $dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2)$

(b) Se $dim(W_1) > 0$ allora $dim(W_1 + W_2) > 0$

(c) Se $dim(W_1) = dim(W_2) = 3$ allora $dim(W_1 + W_2) = 3$

(d) Se $dim(W_1) = dim(W_2) = 3$ allora $dim(W_1 \cap W_2) \geq 2$

Quesito 2.
Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ con $n > 1$.

(a) Se i vettori colonna di A sono una base di $\mathbb{R}^n$ allora A è una matrice ortogonale.

(b) Se i vettori colonna di A sono a due a due ortogonali allora A è una matrice ortogonale.

(c) Se i vettori riga di A sono una base ortogonale allora A è una matrice invertibile.

(d) Se i vettori riga di A sono linearmente indipendenti allora A è una matrice invertibile.

Quesito 3. (V. 1 punto.)
Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.

(a) Il rango di A è uguale al massimo numero di righe di A linearmente indipendenti.

(b) Il rango di A è uguale al massimo numero di colonne di A linearmente indipendenti.

(c) Il rango di A è uguale alla dimensione dell'immagine dell'applicazione lineare associata ad A.

(d) Il rango di A è uguale alla dimensione del nucleo dell'applicazione lineare associata ad A.

Esercizio 1. (V. 2 punti.)

Teorema (Disuguaglianza triangolare)**.** *Dimostrare che*

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad \textit{vale} \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Esercizio 2. (V. 2 punti.)
Sia $z = \frac{(-i-1)^{2016}}{2^{1000}}$.
Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $z = a + bi$.

Esercizio 3. (V. 5 punti.)
Risolvere al variare di k in $\mathbb{R}$ il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2kx-(1+k)y-z &= k \\ 3kx-(k+1)y+z &= 1 \\ kx+z &= 1 \end{cases}$$

indicare in maniera chiara i valori di k per i quali non ci sono soluzioni, i valori di k per i quali la soluzione è unica e i valori di k per i quali ci sono infinite soluzini. Per i valori di k per i quali c'è una sola soluzione calcolarla, infine per i valori di k per i quali le soluzioni sono infinite, trovare lo spazio affine delle soluzioni.

Esercizio 4. (V. 6 punti.)
Data la matrice A:

$$A := \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica e geometrica.

(b) Determinare gli autovettori di A.

(c) Trovare, se esiste, una matrice $H \in GL_4$ tale che posto $D := H^{-1}AH$ si abbia D matrice diagonale.

Esercizio 5. (V. 4 punti.)
Siano $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ due base di $\mathbb{R}^4$. Supponiamo che valgano le seguenti relazioni.

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,0,0,1)_{\mathcal{B}_2} \\ v_2 &= (2,0,1,1)_{\mathcal{B}_2} \\ v_3 &= (0,1,-1,0)_{\mathcal{B}_2} \\ v_4 &= (1,1,1,0)_{\mathcal{B}_2} \end{aligned}$$

(a) Calcolare la matrice $A_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ di cambio di coordinate da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.
(b) Calcolare la matrice $A_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$ di cambio di coordinate da $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.

Esercizio 6. (V. 12 punti.)
In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ siano $P_1 := (0, 4, 2)$, $P_2 := (0, 1, -1)$ punti. $T_1 := \langle(1, 1, 0)\rangle$ e $T_2 := \langle(1, 0, 2)\rangle$ siano sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Siano $W_1 := T_1^\perp$ e $W_2 := T_2^\perp$. Siano π_1 ed π_2 i piani passanti rispettivamente per P_1 e P_2 ortogonali rispettivamente a T_1 e T_2. E infine siano r_1 e r_2 le rette ortogonali rispettivamente a π_1 e π_2 e passanti rispettivamente per i punti P_1 e P_2.
(a) Mostrare che i piani π_1 e π_2 non sono paralleli.
(b) Trovare un'equazione per i piani π_1 e π_2.
(c) Trovare delle equazioni parametriche per i piani π_1 e π_2.
(d) Trovare una base per W_1 e una per W_2.
(e) Determinare dei vettori v_1 e v_2 tali che $r_1 = P_1 + \langle v_1\rangle$ e $r_2 = P_2 + \langle v_2\rangle$.
(f) Calcolare la distanza tra le rete r_1 e r_2.