Prova d'esame di

Fondamenti di algebra lineare e geometria (mat.disp.)

Laurea Triennale in Ingegneria dell'energia

05/07/2016

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA..

Quesiti preliminari di teoria

Sono ammessi al più 3 errori su 12. Qualora non si diano almeno nove risposte corrette su 12 il compito verrà considerato insufficiente (e non verrà corretto il resto dell'elaborato). Il punteggio associato ai quesiti è 3 meno il numero di domande sbagliate.

Quesito 1.

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$? Sia f_A l'applicazione lineare associata ad A.

(a) $dim(Imm(f)) \geq 1$

(b) $dim(ker(f)) \geq 1$

(c) $dim(Imm(f)) \leq 3$

(d) $dim(ker(f)) \leq 3$

Quesito 2.

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni W_1 e W_2 sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$.

(a) Se $W_1 = W_2^\perp$ allora $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^5$.

(b) Se $dim(W1) > dim(W_2^\perp)$ allora $dim(W_2) \leq dim(W_1^\perp)$

(c) Se $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^5$ allora $W_1 = W_2^\perp$.

(d) Se $dim(W_1) \geq 3$ e $dim(W_2) \geq 3$ allora $dim(W_1 \cap W_2) \geq 2$

Quesito 3.

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$.

(a) Se A ha almeno un autovalore $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ allora A ha tre autovalori distinti.

(b) Se λ_1 e λ_2 sono due autovalori distinti di A tali che $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ allora $m.g.(\lambda_1) + m.g.(\lambda_2) = 2$.

(c) Se esiste un autovalore λ di A tale che $m.g.(\lambda) = 3$ allora $A = \lambda I_3$. Dove I_3 è la matrice identità 3×3.

(d) Se esiste un autovalore λ di A tale che $m.a.(\lambda) = 3$ allora $A = \lambda I_3$. Dove I_3 è la matrice identità 3×3.

Soluzione Quesiti
Quesito 1: (b) (c)
Quesito 2: (a)
Quesito 3: (a) (b) (c)

Esercizio 1. (V. 2 punti.)
Dopo aver fornito la definizione di autospazi di una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, dimostrare che gli autospazi di A sono in somma diretta.

Esercizio 2. (V. 4 punti.)
Trovare le radici e decomporre in fattori di primo grado il seguente polinomio:

$$p(z) = z^8 - 3z^6 - z^4 + 3z^2$$

Soluzione
$p(z) = z^6(z^2 - 3) - z^2(z^2 - 3) = z^2(z^4 - 1)(z^2 - 3)$

$$p(z) = z^2(z + 1)(z - 1)(z + i)(z - i)(z + \sqrt{3})(z - \sqrt{3})$$

Radici:
$z_1 = 0$ con molteplicità 2
$z_2 = -1$
$z_3 = 1$
$z_4 = -i$
$z_5 = i$
$z_6 = -\sqrt{3}$
$z_7 = \sqrt{3}$

Esercizio 3. (V. 6 punti.)
Risolvere al variare di t in $\mathbb{R}$ il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} (tx-y)t & = & x+y \\ x+3y-z & = & t^2x-3ty-2tz \\ (t+1)y+(2t-1)z & = & \sin(\pi t) \end{cases}$$

indicare in maniera chiara i valori di t per i quali non ci sono soluzioni, i valori di t per i quali la soluzione è unica e i valori di t per i quali ci sono infinite soluzini. Per i valori di t per i quali c'è una sola soluzione calcolarla, infine per i valori di t per i quali le soluzioni sono infinite, trovare l'eventuale spazio affine delle soluzioni.

Soluzione
CASO $t = 1$ infinite soluzioni

$$S_{t=1} = \langle (1,0,0) \rangle$$

CASO $t = -1$ infinite soluzioni

$$S_{t=-1} = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$$

CASO $t = \frac{1}{2}$ nessuna soluzione
CASO $t =\notin \{\frac{1}{2}, -1, 1\}$ soluzione unica:

$$\begin{cases} x = \frac{\sin \pi t}{1-t^2} \\ y = -\frac{\sin \pi t}{1+t} \\ z = \frac{2 \sin \pi t}{2t-1} \end{cases}$$

Esercizio 4. (V. 5 punti.)
Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice A è diagonalizzabile?

$$A := \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 - |t+1| & t + |t+1| & 1 \\ 0 & 0 & -(3+t) \end{pmatrix}$$

Soluzione

$$|t+1| = \begin{cases} t+1 & \text{se } t+1 \geq 0 \\ -(t+1) & \text{se } t+1 < 0 \end{cases}$$

ovvero

$$|t+1| = \begin{cases} t+1 & \text{se } t \geq -1 \\ -t-1 & \text{se } t < -1 \end{cases}$$

considerando separatamente i due casi $t \geq -1$ e $t < -1$ si arriva al seguente risultato:
la matrice A è diagonalizzabile se e solo se:

$$t \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup \{0\}$$

Esercizio 5. (V. 4 punti.)
Sia f una applicazione lineare da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$. Consideriamo su $\mathbb{R}^2$ la base canonica $\mathcal{C}_2$ e la base $\mathcal{B}_2 := \{(1,2),(3,5)\}$ mentre su $\mathbb{R}^3$ siano $\mathcal{C}_3$ la base canonica e $\mathcal{B}_3$ la base $\mathcal{B}_3 := \{(1,2,-3),(1,1,0),(0,0,1)\}$. Supponiamo infine che si abbia $f(1,2) = (1,2,-3)$ e $f(3,5) = (0,0,1)$.

(a) Determinare la matrice $A^{\mathcal{B}_3}_{\mathcal{B}_2}$ associata all'applicazione f rispetto alle basi $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$.

(b) Determinare la matrice $A^{\mathcal{C}_3}_{\mathcal{B}_2}$ associata all'applicazione f rispetto alle basi $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{C}_3$.

(c) Determinare la matrice $A^{\mathcal{B}_3}_{\mathcal{C}_2}$ associata all'applicazione f rispetto alle basi $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{B}_3$.

(d) Determinare la matrice $A^{\mathcal{C}_3}_{\mathcal{C}_2}$ associata all'applicazione f rispetto alle basi $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$.

Soluzione Consideriamo i seguenti vettori:

$$v_1 = (1,2),\ v_2 = (3,5) \qquad\qquad w_1 = (1,2,-3),\ w_2(1,1,0),\ w_3 = (0,0,1)$$

allora vale

$$\mathcal{B}_2 := \{v_1, v_2\} \qquad\qquad \mathcal{B}_3 := \{w_1, w_2, w_3\}$$

e quindi
$v_1 = (1,2)_{\mathcal{C}_2} = (1,0)_{\mathcal{B}_2}$
$v_2 = (3,5)_{\mathcal{C}_2} = (0,1)_{\mathcal{B}_2}$
$w_1 = (1,2,-3)_{\mathcal{C}_3} = (1,0,0)_{\mathcal{B}_3}$
$w_2 = (1,1,0)_{\mathcal{C}_3} = (0,1,0)_{\mathcal{B}_3}$
$w_3 = (0,0,1)_{\mathcal{C}_3} = (0,0,1)_{\mathcal{B}_3}$
Sia infine B la matrice di cambio di coordinate dalle base $\mathcal{B}_2$ alla base $\mathcal{C}_2$, e B^{-1} l'inversa di B. (La matrice B si può costruire mettendo in colonna i vettori $(1,2)$ e $(3,5)$ mentre la matrice inversa di B va calcolata!)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad\qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Le ipotesi sono

$$f(v_1) = w_1 \qquad f(v_2) = w_2$$

(a) Poiché per ipotesi $f((1,0)_{\mathcal{B}_2}) = (1,0,0)_{\mathcal{B}_3}$ e $f((0,1)_{\mathcal{B}_2}) = (0,0,1)_{\mathcal{B}_3}$ allora si ha:

$$A^{\mathcal{B}_3}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Per ipotesi $f((1,0)_{\mathcal{B}_2}) = (1,2,-3)_{\mathcal{C}_3}$ e $f((0,1)_{\mathcal{B}_2}) = (0,0,1)_{\mathcal{C}_3}$ allora si ha:

$$A^{\mathcal{C}_3}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{B}_3} = A_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3} B^{-1}$$

$$A_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(d)

$$A_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_3} = A_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{C}_3} B^{-1}$$

$$A_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -10 & 6 \\ 17 & -10 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6. (V. 9 punti.)
In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ sia π il piano descritto dalle equazioni parametriche:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + t_1 \\ y = t_1 - t_2 \\ z = -1 + t_2 \end{cases} \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Sia T la giacitura del piano π, sia $W := T^\perp$, sia $P_2 := (1, 2, 0)$, sia r la retta passante per P_2 e ortogonale a π e infine sia P_3 il punto di intersezione tra la retta r e il piano π.

(a) Determinare un punto $P_1 \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ e due vettori $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ tali che $\pi = P_1 + \langle v_1, v_2 \rangle$.

(b) Trovare una base per T.

(c) Determinare un sistema lineare minimale per W.

(d) Trovare una base per W.

(e) Determinare un sistema lineare minimale per T.

(f) Determinare un'equazione cartesiana per π. (Determinare $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) | ax + by + cz = d\}$)

(g) Determinare un sistema lineare minimale per r.

(h) Determinare le coordiante del punto P_3.

(i) Calcolare la distanza tra il punto P_2 e il piano π.

Soluzione `Tutti i quesiti ad eccezione dei quesiti (h) ed (i) hanno più risposte che possono essere ugualmente corrette, quelle che seguono sono delle possibili soluzioni.`

(a) $\pi = (1, 0, -1) + \langle (1, 1, 0), (0, -1, 1) \rangle$
(b) $\mathcal{B}_T = \{(1, 1, 0), (0, -1, 1)\}$
(c)

$$W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{array}{c} x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{array} \right\}$$

(d) $\mathcal{B}_W = \{(1, -1, -1)\}$
(e)

$$W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \ x - y - z = 0 \ \right\}$$

(f)

$$\pi = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{A}^3 \middle| \ x - y - z = 2 \ \right\}$$

(g)

$$r = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{A}^3 \middle| \begin{array}{c} x + y = 3 \\ -y + z = -2 \end{array} \right\}$$

(h) $P_3 = (2, 1, -1)$ (g) $dist(\pi, P_2) = \sqrt{3}$