

COGNOME e NOME

N. MATRICOLA.....

Quesiti preliminari di teoria

Sono ammessi al più 3 errori su 12. Qualora non si diano almeno nove risposte corrette su 12 il compito verrà considerato insufficiente (e non verrà corretto il resto dell'elaborato). Il punteggio associato ai quesiti è 3 meno il numero di domande sbagliate.

Quesito 1.

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni W_1, W_2 sottospazi vettoriali di $V = \mathbb{R}^5$.

- (a) Se $\dim(W_1) + \dim(W_2) = 7$ allora $\dim(W_1 \cap W_2) \geq 2$
- (b) Se $\dim(W_1) = \dim(W_2) = 1$ allora $\dim(W_1^\perp + W_2^\perp) \geq 4$
- (c) Se $W_1 = W_2^\perp$ allora $\dim(W_1 \cap W_2) = 5$
- (d) Se $W_1 \cap W_2^\perp = \{0\}$ allora $\dim(W_1) + \dim(W_2) > 0$

Quesito 2.

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in M_{4,3}(\mathbb{R})$? Sia f_A l'applicazione lineare associata ad A .

- (a) $\dim(\text{Imm}(f)) \geq 1$
- (b) $\dim(\ker(f)) \geq 1$
- (c) $\dim(\text{Imm}(f)) \leq 3$
- (d) $\dim(\ker(f)) \leq 3$

Quesito 3.

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni n -upla di vettori $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$.

- (a) Se i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono a due a due ortogonali allora $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale.
- (b) Se i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono a due a due ortogonali allora la matrice che ha come colonne i vettori $v_1, \dots, v_n$ è una matrice ortogonale.
- (c) Se i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono a due a due ortogonali allora la matrice che ha come righe i vettori $v_1, \dots, v_n$ è una matrice ortogonale.
- (d) Se la matrice che ha come righe i vettori $v_1, \dots, v_n$ è una matrice ortogonale allora $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale.

Soluzione Quesiti

Quesito 1: (a) (b)

Quesito 2: (c) (d)

Quesito 3: (d)

Esercizio 1. (V. 2 punti.)

Dimostrare la seguente proposizione:

Proposizione. *Sia f un'applicazione lineare da un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale V ad un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale W . Dimostrare che f è iniettiva se e solo se $\ker(f) = \{0_V\}$.*

Esercizio 2. (V. 4 punti.)

Trovare le radici e decomporre in fattori di primo grado i seguenti polinomi:

$$p_1(z) = z^3 - 2$$

$$p_2(z) = 2z^6 - 3z^3 - 2$$

Soluzione

$$p_1(z) = \left(z - \sqrt[3]{2}\right) \left(z - \sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right) \left(z - \sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)$$

$$\begin{aligned} p_2(z) = & \left(z - \sqrt[3]{2}\right) \left(z - \sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right) \left(z - \sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right) \cdot \\ & \cdot \left(z + \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) \left(z + \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right) \left(z + \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right) \end{aligned}$$

Esercizio 3. (V. 6 punti.)

Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z al variare di $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} (|t| + t)(x + 1) + y &= 0 \\ z - y &= 1 - t - |t| \\ (|t| - t)x + y - z &= |t| \end{cases}$$

Soluzione Per $t = 1$ ci sono infinite soluzioni

$$S_{t=1} = \left\{ \left(\frac{-z-3}{2}, z+1, z \right) \middle| z \in \mathbb{R} \right\}$$

per $t < 0$ la soluzione è unica

$$S_{t<0} = \left(\frac{t-1}{2t}, 0, 1 \right)$$

per $t \in [0, 1) \cup (1, \infty)$ non ci sono soluzioni.

Esercizio 4. (V. 6 punti.)

Al variare di $t \in \mathbb{R}$ sia A_t la matrice seguente:

$$A_t := \begin{pmatrix} 1 & t^2 - 2 & 1 - t \\ 0 & 2 & t - 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare gli autovalori di A_t e la loro molteplicità algebrica.
- (b) Per i valori di t per i quali esiste, determinare una matrice $H \in GL_3$ tale che posto $D := H^{-1}AH$ si abbia D matrice diagonale?

Soluzione $p(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)^2$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebriche rispettivamente 1 e 2. La molteplicità geometrica di $\lambda_1 = 1$ mentre per λ_2 vale la seguente uguaglianza:

$$m.g.(\lambda_2) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \neq 1 \\ 2 & \text{se } t = 1 \end{cases}$$

Nel caso $t \neq 1$ la matrice non si diagonalizza.

CASO $t = 1$:

$$V_{\lambda_1} = \langle (1, 0, 0) \rangle$$

$$V_{\lambda_2} = \langle (1, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

Una matrice H che diagonalizza A è la seguente:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. (V. 4 punti.)

Sia T il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1 = (0, 0, 3, 4)$, $v_2 = (1, 0, 0, 0)$ e $v_3 = (1, 2, 3, 4)$.

- (a) Determinare una base ortonormale per T .
- (b) Determinare la matrice A associata alla proiezione ortogonale sul sottospazio T .

Soluzione Una possibile base ortonormale è $\mathcal{B}_T = \{u_1, u_2, u_3\}$ è data dai seguenti vettori:

$$u_1 = \left(0, 0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \quad u_2 = (1, 0, 0, 0) \quad u_3 = (0, 1, 0, 0)$$

La matrice A associata alla proiezione ortogonale è unica (non dipende dalla base trovata):

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{25} & \frac{12}{25} \\ 0 & 0 & \frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{pmatrix}$$

Esercizio 6. (V. 8 punti.)

In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ sia π il piano descritto dall'equazioni $x+y+z=3$. Sia T la giacitura del piano π e sia $W := T^\perp$. Sia r_1 la retta passante per i punti $A = (1, 2, 3)$ e $B = (1, 0, -1)$. Sia r_2 la retta passante per il punto A e ortogonale a π . Sia P_1 il punto di intersezione tra r_1 e π . Sia infine P_2 il punto di intersezione tra r_2 e π .

- (a) Determinare un sistema lineare minimale per T .
- (b) Trovare una base per W .
- (c) Trovare una base per T .
- (d) Determinare un sistema lineare minimale per W .
- (e) Determinare un punto $P \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ e un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $r_1 = P + \langle v, \rangle$.
- (f) Determinare le coordiante del punto P_1 .
- (g) Determinare le coordiante del punto P_2 .
- (h) Calcolare la distanza tra il punto A e il piano π .

Soluzione

- (a) $x + y + z = 0$
- (b) $\mathcal{B}_W = \{(1, 1, 1)\}$
- (c) $\mathcal{B}_T = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$
- (d) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$
- (e) $r_1 = (1, 2, 3) + \langle (0, 2, 4) \rangle$
- (f) $P_1 = (1, 1, 1)$
- (g) $P_2 = (0, 1, 2)$
- (h) $dist(A, \pi) = \sqrt{3}$