Dimostrazioni per l'esame di Fondamenti di algebra lineare e geometria (mat.disp.) Laurea Triennale in Ingegneria dell'energia 2015/2016

Proposizione 1. *Dato uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ e due sottospazi vettorile W_1 e W_2. Dimostrare che l'intersezione $U := W_1 \cap W_2$ è un sottospazio vettoriale di V.*

Proposizione 2. *Siano assegnati uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ e due sottospazi vettorile W_1 e W_2. Dopo aver formito la definizione di somma diretta, dimostrare che se W_1 e W_2 sono in somma diretta detta U la loro somma ($U := W_1 \oplus W_2$) allora ogni vettore di U si scrive in maniera unica come somma di un vettore di W_1 e uno di W_2.*

Proposizione 3. *Sia f un'applicazione lineare da un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale V ad un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale W. Dimostrare che f è iniettiva se e solo se $ker(f) = \{0_V\}$.*

Proposizione 4. *Dopo aver fornito la definizione di similitudine tra due matrici, dimostrare che tale relazione di similitudine è una relazione di equivalenza.*

Proposizione 5. *Dopo aver fornito la definizione di autospazi di una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, dimostrare che gli autospazi di A sono in somma diretta.*

Proposizione 6. *Dimostrare che due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.*

Theorem 7 (Cauchy-Schwarz)**.** *Dimostrare che*

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad vale \quad |v \cdot w| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

Theorem 8 (Disuguaglianza triangolare)**.** *Dimostrare che*

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad \textit{vale} \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Proposizione 9. *Dimostrare che se* $v_1, \ldots, v_k$ *sono vettori non nulli ortogonali allora sono anche indipendenti.*

Proposizione 10. *Dimostrare che il prodotto di due matrici ortogonali è ancora una matrice ortogonale.*

Proposizione 11. *Dimostrare che se una matrice ammette una base ortonormale di autovettori allora è simmetrica.*