Esercizi 10
24\05\2016

David Barbato

Esercizio 1. *Data la matrice:*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & k \end{pmatrix}$$

(a) Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ la diagonalizzabilità della matrice A
(b) Posto $k = 6$ trovare se esiste, una matrice $H \in GL_2$ tale che posto $D := H^{-1}AH$ si abbia D matrice diagonale.
(c) Esiste una base di autovettori che diagonalizza A?
(d) Esiste una base ortonormale di autovettori che diagonalizza A?

Esercizio 2. *Data la matrice A:*

$$A := \begin{pmatrix} k^2 & k^2-1 & 2k-k^2 \\ 1-k^2 & 2-k^2 & k^2-1 \\ 0 & 0 & 2k \end{pmatrix}$$

Per quali valori del parametro k la matrice A è diagonalizzabile? Esistono dei valori $k \in \mathbb{R}$ tali che la matrice A è simile a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. *Consideriamo la matrice A:*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2h & 2h \\ 2h & h+1 & 0 \\ 2h & 0 & 1-h \end{pmatrix}$$

(a) Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la matrice A è diagonalizzabile?
(b) Verificare che $\lambda_1 = 1$ è un autovalore di A.
(c) Calcolare il polinomio caratteristico di A.
(d) Determinare gli autovalori di A.(Utilizzare i risultati dei punti (b) e (c))
(e) Per quali valori di h la molteplicità algebrica di $\lambda_1 = 1$ è uguale a 1?
(f) Per i valori di h trovati al punto (e) determinare l'autovettore relativo a λ_1.
(g) Determinare una base ortonormale di autovettori per A.

Esercizio 4. *In* $\mathbb{R}^4$ *dato* $T := \langle(0,0,2,0),(-1,0,1,0),(1,1,-1,-1)\rangle$ *determinare una base ortonormale per* T.

Esercizio 5. *In* $\mathbb{R}^4$ *dato* $T := \langle(1,1,1,1),(1,1,0,0)\rangle$ *determinare una base ortonormale per* T.

Esercizio 6. *Sia* T *il sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^3$ *di dimensione 2 che ha come base i vettori* $v_1 := (0,1,0)$ *e* $v_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.
(a) Dimostrare che v_1 *e* v_2 *formano una base ortonormale di* T.
(b) Trovare un vettore v_3 *tale che* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *è una base ortonormale di* $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 7. *In* $\mathbb{R}^4$ *sia* $T := \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ *con* $v_1 = (0,1,0,0)$, $v_2 = (\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ *e* $v_3 = (\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$
(a) Verificare che $\mathcal{B}_T = \{v_1, v_2, v_3\}$ *è una base ortonormale di* T.
(b) Costruire la matrice A *associata alla proiezione ortogonale sullo spazio* T.

Soluzioni

Esercizio 1 Il polinomio caretteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - (k+1)\lambda + k - 6$ il dicriminante del polinomio caratteristico è dato da: $\triangle = k^2 - 2k + 25$. E' facile verificare che $\triangle > 0$ per ogni valore di k, dunque il polinoimo caratteristico ha due radici reali distinte e la matrice A è diagonalizzabile per ogni k.
(b) Se si pone k=6 allora la matrice diventa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda$, gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 7$ e due autovettori sono $v_1 = (2, -1)$ e $v_2 = (1, 3)$. Quindi posso porre

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

e si ottiene:

$$H^{-1}AH = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(c) Si, chiaramente esiste per ogni k. L'esistenza della base di autovettori è equivalente alla diagonabilità.
(d) No, non può esistere una base ortonormale di autovettori di A perché A non è una matrice simmetrica.

Esercizio 2
Il polinomio caratteristico di A è dato da:
$p(\lambda) = (2k - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (2k - \lambda)(\lambda - 1)^2$ Ci sono due casi che vanno considerati separatamente: $k = \frac{1}{2}$ e $k \neq \frac{1}{2}$.
CASO $k = \frac{1}{2}$. Se $k = \frac{1}{2}$ allora la matrice ha un solo autovalore $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica 3. La matrice $A - \lambda_1 I$ diventa:

$$A - \lambda_1 I := \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ricava facilmente che il rango di $A - \lambda_1 I$ è uguale a 1 e che la molteplicità geometrica di λ_1 è uguale 2 dunque per $k = \frac{1}{2}$ poiché la molteplicità geometrica e quella algebrica di λ_1 sono diverse allora la matrice A non è diagonalizzabile.

CASO $k \neq \frac{1}{2}$. Se $k \neq \frac{1}{2}$ allora la matrice A ha due autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2k$ con molteplicità 2 ed 1. Affinché A sia diagonalizzabile occorre e basta che la molteplicità geometrica di λ_1 sia uguale a 2. Occorre calcolare il rango di $A - \lambda_1 I$

$$A - \lambda_1 I := \begin{pmatrix} k^2 - 1 & k^2 - 1 & 2k - k^2 \\ 1 - k^2 & 1 - k^2 & k^2 - 1 \\ 0 & 0 & 2k - 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k^2-1 & k^2-1 & 2k-k^2 \\ 1-k^2 & 1-k^2 & k^2-1 \\ 0 & 0 & 2k-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{2,1}(1)} \begin{pmatrix} k^2-1 & k^2-1 & 2k-k^2 \\ 0 & 0 & 2k-1 \\ 0 & 0 & 2k-1 \end{pmatrix}$$

Poiché $k \neq \frac{1}{2}$ allora $2k-1 \neq 0$ dunque:

$$\xrightarrow{H_2(\frac{1}{2k-1})} \begin{pmatrix} k^2-1 & k^2-1 & 2k-k^2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2k-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{3,2}(1-2k)]{H_{1,2}(k^2-2k)} \begin{pmatrix} k^2-1 & k^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ci sono due casi se $k^2-1=0$ allora il rango di $A-\lambda_1 I$ è uguale a 1 quindi la molteplicità algebrica di λ_1 è uguale a 2 e la matrice è diagonalizzabile se $k^2-1 \neq 0$ allora il rango di $A-\lambda_1 I$ è uguale a 2 quindi la molteplicità algebrica di λ_1 è uguale a 1 e la matrice non è diagonalizzabile. Quindi la matrice A è diagonalizzabile solo se $k^2-1=0$ cioè se $k \in \{1,-1\}$
Se $k=1$ gli autovalori sono $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ con molteplicità rispettivamente 2 e 1.
Se $k=-1$ gli autovalori sono $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$ con molteplicità rispettivamente 2 e 1.
Dunque la matrice A è simile alla matrice indicata dal testo se e solo se $k=1$.

Esercizio 3

(a) La matrice A è sempre diagonalizzabile perché è simmetrica.
(b) Basta calcolare il rango di $A-\lambda_1 I$.

$$A-\lambda_1 I := \begin{pmatrix} 0 & 2h & 2h \\ 2h & h & 0 \\ 2h & 0 & -h \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2h & 2h \\ 2h & h & 0 \\ 2h & 0 & -h \end{pmatrix} \xrightarrow[H_1(\frac{1}{2})]{H_{3,2}(-1)} \begin{pmatrix} 0 & h & h \\ 2h & h & 0 \\ 0 & -h & -h \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_{1,2}} \begin{pmatrix} 2h & h & 0 \\ 0 & h & h \\ 0 & -h & -h \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{1,2}(-1)]{H_{3,2}(1)} \begin{pmatrix} 2h & 0 & -h \\ 0 & h & h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per ogni valore di h il rango di $A-\lambda_1 I$ è minore di 3 dunque $\lambda_1=1$ è una autovalore di A. Si può anche notare che per $h=0$ il rango di $A-\lambda_1 I$ è uguale a zero e quindi la matrice A ha un solo autovalore co molteplicità 3. Questo risultato si poteva notare anche sostituendo direttamente $h=0$ nella matrice A e notando che così facendo si otteneva la matrice identità. Inoltre possiamo ancora notare che per $h \neq 0$ il rango di $A-\lambda_1 I$ è uguale a 2 dunque l'autovalore $\lambda_1=1$ ha molteplicità algebrica 1.
Infine dall'ultima matrice ottenuta possiamo trovare un autovettore per λ_1 risolvendo:

$$\begin{pmatrix} 2h & 0 & -h \\ 0 & h & h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

da cui ricaviamo per esempio l'autovettore $v_1=(1,-2,2)$.
(c) Per trovare il polinomio caratteristico di A dobbiamo calcolare il determinante di $A-\lambda I$,

può essere utile per semplificare i calcoli sapere che $\lambda_1 = 1$ è una radice del polinomio caratteristico cioè $(1-\lambda)$ è un divisore del polinomio caratteristico.

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(h+1-\lambda)(1-h-\lambda) - 2h \cdot 2h(1-h-\lambda) - 2h(h+1-\lambda)2h$$

sviluppiamo cercando di raccogliere un fattore $(1-\lambda)$

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2-h^2) + 4h^3 - 4h(1-\lambda) - 4h^3 - 4h(1-\lambda)$$

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 9h^2)$$

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda - 1 + 3h)(\lambda - 1 - 3h)$$

(d) Per $h = 0$ ha un solo autovalore $\lambda_1 = 1$ altrimenti ha tre autovalori distinti:$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + 3h$, $\lambda_3 = 1 - 3h$
(e) Per ogni h diverso da zero.
(f) Vedi questito (b). $v_1 = (1, -2, 2)$.
(g) $v_1 = \frac{1}{3}(1, -2, 2)$, $v_2 = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$, $v_3 = \frac{1}{3}(-2, 1, 2)$. Notare inoltre che se $h = 0$ allora si ha $A = I$ e qualunque base ortonormale è una base ortonormale di autovettori.

Esercizio 4
Applicando il procedimentodi Gram Schmith si ottiene:

$$\mathcal{B}_T = \left\{(0,0,1,0), (-1,0,0,0), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

Esercizio 5
Applicando il procedimentodi Gram Schmith si ottiene:

$$\mathcal{B}_T = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$$

Esercizio 6
(a) Basta verificare che i vettori v_1 e v_2 sono di norma 1 e ortogonali.
(b) Prima di tutto bisogna costruire una base di R^3 che contenga i vettori v_1 e v_2 e poi si applica Gram Schmith. Per costruire la base costruiamo la matrice associata ai due vettori e applichiamo la riduzione di Gauss.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a questo punto per ottenere una matrice di rango 3 ci basta aggiungere il vettore $u = (0, 0, 1)$. Applichiamo ora il procedimento di Gram Schmith ai vettori v_1, v_2 e u e otteniamo $v_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Esercizio 7

(a) Basta verificare che: $||v_1|| = 1$, $||v_2|| = 1$, $||v_3|| = 1$, $v_1 \cdot v_2 = 0$, $v_1 \cdot v_3 = 0$, $v_2 \cdot v_3 = 0$.

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0,1,0,0) + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} (\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} (\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) =$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & 0 & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & 0 & \frac{2}{9} & \frac{8}{9} \end{pmatrix}$$