

# Esercizi 11

## 31\05\2016

David Barbato

### Breve riepilogo di teoria

Consideriamo il sistema lineare:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \dots & \dots \\ a_{k,1}x_1 + \dots + a_{k,n}x_n = b_k \end{cases}$$

se il sistema ammette soluzione allora l'insieme delle soluzioni  $S$  è un sottospazio affine di  $\mathbb{R}^n$ .  $S = P + T$  con  $P \in \mathbb{R}^n$  e  $T \leq \mathbb{R}^n$ . La decomposizione di  $S$  non è unica ma vale la seguente proposizione:

**Proposizione 1.** *Se  $S_1 = P_1 + T_1$  e  $S_2 = P_2 + T_2$  sono due sottospazi affini di  $\mathbb{R}^n$  allora vale la seguente relazione:*

$$S_1 = S_2 \quad \iff \quad T_1 = T_2 \text{ e } P_2 - P_1 \in T_i$$

**Sistemi lineari omogenei.** Consideriamo ora un sottospazio vettoriale  $T \leq \mathbb{R}^n$  ed il suo ortogonale  $W = T^\perp$ . Siano  $v_1, \dots, v_k$  e  $w_1, \dots, w_h$  vettori di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , allora valgono le seguenti relazioni:

$$T = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \quad \iff \quad W \text{ è lo spazio soluzione di } \begin{cases} v_1 \cdot x = 0 \\ \dots \\ v_k \cdot x = 0 \end{cases}$$

$$W = \langle w_1, \dots, w_h \rangle \quad \iff \quad T \text{ è lo spazio soluzione di } \begin{cases} w_1 \cdot x = 0 \\ \dots \\ w_h \cdot x = 0 \end{cases}$$

inoltre se i vettori  $v_1, \dots, v_k$  sono linearmente indipendenti e  $T = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$  allora  $v_1, \dots, v_k$  è una base di  $T$  e il sistema  $\begin{cases} v_1 \cdot x = 0 \\ \dots \\ v_k \cdot x = 0 \end{cases}$  è minimale tra i sistemi lineari che ammettono  $W$  come spazio delle soluzioni, (minimale nel senso che ha il numero minimo di equazioni). Lo stesso si può dire se  $w_1, \dots, w_h$  sono linearmente indipendenti ...

**Sistemi lineari non omogenei.** Siano  $v_1, \dots, v_k$  vettori di  $\mathbb{R}^n$ , sia  $b \in \mathbb{R}^k$  e sia  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , consideriamo il sistema lineare non omogeneo seguente:

$$\begin{cases} v_1 \cdot x = b_1 \\ \dots \\ v_k \cdot x = b_k \end{cases} \quad (1)$$

se il sistema (1) ammette soluzione allora l'insieme delle soluzioni  $S$  è dato da un sottospazio affine di  $\mathbb{R}^n$ ,  $S = P + T$  con  $P \in \mathbb{R}^n$  e  $T \leq \mathbb{R}^n$ . Dove  $P$  è una qualunque soluzione del sistema (1) mentre  $T$  è lo spazio soluzione del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} v_1 \cdot x = 0 \\ \dots \\ v_k \cdot x = 0 \end{cases}$$

vale ancora

$$W = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \iff W = T^\perp .$$

**Esercizio 1.** *Dato il sistema:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

sia  $T$  lo spazio delle soluzioni e sia  $W := T^\perp$ . Determinare una base per  $T$ , una base per  $W$ , un sistema lineare minimale che abbia  $T$  come spazio delle soluzioni e un sistema lineare minimale che abbia  $W$  come insieme delle soluzioni.

**Esercizio 2.** *Consideriamo il seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 2 \\ x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 3 \end{cases}$$

determinare se ammette soluzione. Determinare l'insieme  $S$  delle soluzioni ed un sistema minimale di equazioni lineari che ammette  $S$  come spazio affine delle soluzioni.

**Esercizio 3.** *Sia  $T_t$  al variare di  $t \in \mathbb{R}$  lo spazio delle soluzioni del seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} x + ty + z = 0 \\ x - ty - z = 0 \\ x + y + tz = 0 \end{cases}$$

sia  $W_t := T_t^\perp$  determinare una base di  $W_t$  al variare di  $t \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 4.** Risolvere il seguente sistema in  $x, y, z \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} x + y^3 + z = 1 \\ x + 2z = 0 \\ x + y^3 - z = 3 \end{cases}$$

**Esercizio 5.** Consideriamo il seguente sistema nelle incognite  $M \in \mathbb{R}$ ,  $\theta_1, \theta_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ :

$$\begin{cases} M + (t^2 - 1) \tan(\theta_1) + t(\tan(\theta_2) - 1) + |t| = 0 \\ (1 - t^2) \tan(\theta_1) - t \tan(\theta_2) - |t| = 0 \\ M - t \tan(\theta_2) - |t|(1 + \tan(\theta_2)) = 0 \end{cases}$$

stabilire al variare di  $t$  in  $\mathbb{R}$  se ammette una, zero o infinite soluzioni.

**Esercizio 6.** In  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  sia  $r$  la retta di equazione cartesiana  $3x + 4y = 5$ . Trovare delle equazioni parametriche per  $r$ .

**Esercizio 7.** In  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$  sia  $r$  la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Trovare delle equazioni parametriche per  $r$ .

## Soluzioni

**Esercizio 1** La matrice associata al sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

tramite operazioni elementari di riga applicando la riduzione di Gauss Jordan possiamo ridurci a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

siano  $w_1 = (1, 0, -1, -1)$  e  $w_2 = (0, 1, 1, 0)$  allora  $\mathcal{B}_W := (w_1, w_2)$  è una base di  $W$ . Mentre  $T$  è lo spazio delle soluzioni del sistema minimale:

$$\begin{cases} w_1 \cdot x = 0 \\ w_2 \cdot x = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Dall'ultimo sistema possiamo ricavare  $\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$  quindi

$$T = \{(x_3 + x_4, -x_3, x_3, x_4) | x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

$T = \langle (1, -1, 1, 0), (1, 0, 0, 1) \rangle$  posto  $v_1 = (1, -1, 1, 0)$  e  $v_2 = (1, 0, 0, 1)$  allora  $\mathcal{B}_T := (v_1, v_2)$  è una base di  $T$ . Mentre  $W$  è lo spazio delle soluzioni del sistema minimale:

$$\begin{cases} v_1 \cdot x = 0 \\ v_2 \cdot x = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Per indicare che  $W$  è lo spazio delle soluzioni del sistema (2) avremmo potuto anche scrivere:  $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^n | x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_4 = 0\}$ .

**Esercizio 2** La matrice associata al sistema è

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

tramite operazioni elementari di riga applicando la riduzione di Gauss Jordan possiamo ridurci a:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

poiché non ci sono pivot sulla colonna dei termini noti allora il sistema ammette soluzione. Il sistema seguente

$$\begin{cases} x_1 - 2x_5 = -1 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 3 \\ x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

è un sistema lineare minimale che ammette  $S$  come spazio delle soluzioni. Ci sono 3 pivot:  $x_1, x_2$  e  $x_4$ . Mentre le variabili libere sono 2  $x_3$  e  $x_5$ . Dunque

$$\begin{cases} x_1 = 2x_5 - 1 \\ x_2 = -x_3 - x_5 + 3 \\ x_4 = -2x_5 + 1 \end{cases}$$

$$S = \{(2x_5 - 1, -x_3 - x_5 + 3, x_3, -2x_5 + 1, x_5) | x_3, x_5 \in \mathbb{R}\}$$

$$S = (-1, 3, 0, 1, 0) + \langle (0, -1, 1, 0, 0), (2, -1, 0, -2, 1) \rangle$$

**Esercizio 3** Il sistema lineare dell'esercizio può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} w_1 \cdot (x, y, z) = 0 \\ w_2 \cdot (x, y, z) = 0 \\ w_3 \cdot (x, y, z) = 0 \end{cases}$$

con  $w_1 = (1, t, 1)$ ,  $w_2 = (1, -t, -1)$ ,  $w_3 = (1, 1, t)$ . Dunque  $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$  per trovare una base bisogna trovare dei generatori indipendenti, (i vettori  $w_1, w_2, w_3$  potrebbero essere o non essere indipendenti in funzione di  $t$ ).

La matrice associata ai vettori è

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & -t & -1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

tramite operazioni elementari di riga possiamo ricondurci alla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1-t^2 \end{pmatrix}$$

ci sono almeno due pivot, mentre per il terzo bisogna capire se  $1-t^2 = 0$  oppure  $1-t^2 \neq 0$ .

CASO  $t = -1$ . Se  $t = -1$  allora  $\mathcal{B}_{W_t} = ((1, 0, 0), (0, 1, -1))$  è una base di  $W_t$

CASO  $t = 1$ . Se  $t = 1$  allora  $\mathcal{B}_{W_t} = ((1, 0, 0), (0, 1, 1))$  è una base di  $W_t$

CASO  $t \notin \{-1, 1\}$ . Se  $t \notin \{-1, 1\}$  allora  $W_t$  ha dimensione 3 dunque  $W = \mathbb{R}^3$  e una base è data da:  $\mathcal{B}_{W_t} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$

#### Esercizio 4

Il sistema lineare in  $x, y, z$  non è lineare ma può diventare lineare ponendo  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y^3$  e  $x_3 = z$  (quindi  $y = \sqrt[3]{x_2}$ ), da cui si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

risolvendo si ottiene  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = -1$ , dunque  $x = 2$ ,  $y = 0$  e  $z = -1$

#### Esercizio 5

Ponendo  $x_1 = M$ ,  $x_2 = \tan(\theta_1)$  e  $x_3 = \tan(\theta_2)$  si ottiene un sistema lineare dalla cui risoluzione si ricava:

Per  $t \in \{(-\infty, 0) \cup \{1\}\}$  nessuna soluzione.

Per  $t = 0$  infinite soluzioni:  $M = 0$ ,  $\theta_1 = 0$ ,  $\forall \theta_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

Per  $t \in \{(0, 1) \cup (1, \infty)\}$  soluzione unica:  $M = t$ ,  $\theta_1 = \arctan(\frac{t}{1-t^2})$ ,  $\theta_2 = 0$

**Esercizio 6** La soluzione non è unica delle possibili soluzioni sono le seguenti:

$$r : \begin{cases} x = -\frac{4}{3}t + \frac{5}{3} \\ y = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (3)$$

oppure

$$r : \begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = -3t - 1 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

svolgimento: occorre risolvere l'equazione  $3x + 4y = 5$  risolvendo nella solita maniera si ottiene  $x = -\frac{4}{3}y + \frac{5}{3}$  e dunque

$$r = \left\{ \left( -\frac{4}{3}y + \frac{5}{3}, y \right) \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left( -\frac{4}{3}t + \frac{5}{3}, t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

da cui si ottengono le equazioni parametriche (3).

**Esercizio 7** Riduciamo con l'algoritmo di Gauss-Jordan la matrice associata al sistema,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - z = 3 \\ y + z = -1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = z + 3 \\ y = -z - 1 \end{cases}$$

$$r = \{(z + 3, -z - 1, z) | z \in \mathbb{R}\} = \{(t + 3, -t - 1, t) | t \in \mathbb{R}\}$$

dunque

$$\begin{cases} x = t + 3 \\ y = -t - 1 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$