Esercizi 12
7\06\2016

David Barbato

Esercizio 1. *Nello spazio affine* $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ *consideriamo la retta* r *di equazione* $x + y = 1$ *ed il punto* A *di coordinate* $(4, 1)$. *Sia* s *la retta passante per* A *ed ortogonale ad* r *e sia* B *il punto di intersezione delle rette* r *ed* s. *Sia infine* T *la giacitura di* r *e sia* $W := T^{\perp}$.
(a) Scrivere r *come sottovarietà lineare* $r = P_1 + T$.
(b) Scrivere un'equazione per T.
(c) Trovare una base di T.
(d) Scrivere un'equazione per W.
(e) Trovare una base di W.
(f) Scrivere s *sotto forma* $s = P_2 + W$.
(g) Scrivere un'equazione per la retta s.
(h) Calcolare le coordinate del punto B.
(i) Quanto vale la distanza tra il punto A *e la retta* r*?*

Esercizio 2. *Nello spazio affine* $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ *consideriamo la retta* r *di equazione* $x - 2y = 3$ *ed il punto* A *di coordinate* $(-1, 3)$. *Sia* s *la retta passante per* A *ed ortogonale ad* r *e sia* B *il punto di intersezione delle rette* r *ed* s. *Sia infine* T *la giacitura di* r *e sia* $W := T^{\perp}$.
(a) Scrivere r *come sottovarietà lineare* $r = P_1 + T$.
(b) Scrivere un'equazione per T.
(c) Trovare una base di T.
(d) Scrivere un'equazione per W.
(e) Trovare una base di W.
(f) Scrivere s *sotto forma* $s = P_2 + W$.
(g) Scrivere un'equazione per la retta s.
(h) Calcolare le coordinate del punto B.
(i) Quanto vale la distanza tra il punto A *e la retta* r*?*

Esercizio 3. *Nello spazio affine* $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ *consideriamo la retta* r *di equazione* $3x - 4y = 13$ *ed il punto* A *di coordinate* $(1, 3)$. *Sia* s *la retta passante per* A *ed ortogonale ad* r *e sia* B *il punto di intersezione delle rette* r *ed* s. *Sia infine* T *la giacitura di* r *e sia* $W := T^{\perp}$.
(a) Scrivere r *come sottovarietà lineare* $r = P_1 + T$.
(b) Scrivere un'equazione per T.
(c) Trovare una base di T.
(d) Scrivere un'equazione per W.
(e) Trovare una base di W.

(f) Scrivere s sotto forma $s = P_2 + W$.
(g) Scrivere un'equazione per la retta s.
(h) Calcolare le coordinate del punto B.
(i) Quanto vale la distanza tra il punto A e la retta r?

Esercizio 4. *Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ consideriamo il piano π di equazione $x + y + z = 1$ ed il punto A di coordinate $(2, 3, 2)$. Sia s la retta passante per A ed ortogonale ad π e sia B il punto di intersezione tra il piano π e la retta s. Sia infine T la giacitura di π e $W := T^{\perp}$.*
(a) Scrivere π come sottovarietà lineare $\pi = P_1 + T$.
(b) Scrivere un'equazione per T.
(c) Trovare una base di T.
(d) Scrivere un sistema di equazioni lineari minimale per W.
(e) Trovare una base di W.
(f) Scrivere s sotto forma $s = P_2 + W$.
(g) Scrivere un sistema di equazioni lineari minimale per la retta s.
(h) Calcolare le coordinate del punto B.
(i) Quanto vale la distanza tra il punto A e il piano π?

Esercizio 5. *Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ consideriamo il piano π di equazione $2x + 6y + 3z = -4$ ed il punto A di coordinate $(3, 4, 5)$. Sia s la retta passante per A ed ortogonale ad π e sia B il punto del piano π di minima distanza dal punto A (B è il punto di intersezione tra il piano π e la retta s). Sia infine T la giacitura di π e $W := T^{\perp}$.*
(a) Scrivere π come sottovarietà lineare $\pi = P_1 + T$.
(b) Scrivere un'equazione per T.
(c) Trovare una base di T.
(d) Scrivere un sistema di equazioni lineari minimale per W.
(e) Trovare una base di W.
(f) Scrivere s sotto forma $s = P_2 + W$.
(g) Scrivere un sistema di equazioni lineari minimale per la retta s.
(h) Calcolare le coordinate del punto B.
(i) Quanto vale la distanza tra il punto A e il piano π?

Esercizio 6. *Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ consideriamo il piano π di equazione $2x - y - 2z = 12$ ed il punto A di coordinate $(1, 2, 3)$. Calcolare la distanza tra il punto A ed il piano π. (Procedere come nell'esercizio precedente)*

Esercizio 7. *Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ consideriamo la retta r soluzione del sistema:*

$$\begin{cases} x - 2z = 11 \\ y = 1 \end{cases}$$

ed il punto A di coordinate $(-1,0,4)$. Sia π il piano passante per A ed ortogonale alla retta r e sia B il punto di intersezione tra il piano π e la retta r. Sia infine T la giacitura di r e $W := T^{\perp}$.
(a) Scrivere r come sottovarietà lineare $\pi = P_1 + T$.
(b) Scrivere un sistema di equazioni lineari minimale per T.
(c) Trovare una base di T.
(d) Scrivere un sistema di equazioni lineari minimale per W.
(e) Trovare una base di W.
(f) Scrivere π sotto forma $\pi = P_2 + W$.
(g) Scrivere un sistema di equazioni lineari minimale per il piano π.
(h) Calcolare le coordinate del punto B.
(i) Quanto vale la distanza tra il punto A e la retta r?

Esercizio 8. *Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ consideriamo la retta r soluzione del sistema:*

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - 3z = 9 \end{cases}$$

ed il punto A di coordinate $(3,1,4)$. Calcolare la distanza tra il punto A e la retta r. (Procedere come nell'esercizio 7)

Soluzioni

Esercizio 1 (a) I punti della r sono dati dalle soluzioni dell'equazione lineare $x + y = 1$. Ricavando x si ottiene $x = -y + 1$ dunque

$$r = \{(-y+1, y) | y \in \mathbb{R}\} = (1,0) + \{(-y, y) | y \in \mathbb{R}\} = (1,0) + \langle(-1,1)\rangle$$

dunque

$$P_1 = (1,0) \qquad \text{e} \qquad T = \langle(-1,1)\rangle$$

Prima di procedere può essere istruttivo effettuare un disegno che rappresenta sul piano i punti A e B e le rette r e s.
(b) L'equazione per T è data dalla parte omogenea dell'equazione di r quindi $x + y = 0$

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\}$$

(c) Una base di T è data dal vettore $(-1,1)$.
(d) Per i punti (d) ed (e) si procede come nell'esercizio 1 del foglio 11. (Per ulteriori chiarimenti vedere anche la nota su sistemi lineari omogenei sempre del foglio 11.) Un'equazione per w è data dal prodotto scalare tra i vettori della base di T e il vettore delle ingognite (x,y) quindi

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -x + y = 0\}$$

(e)

$$W = \langle(1,1)\rangle$$

(f) Sappiamo che la retta s passa per A e abbiamo già calcolato lo spazio W in (e) quindi

$$s = (4,1) + \langle(1,1)\rangle$$

(g) Sappiamo che l'equazione per W è $-x + y = 0$ dunque un'equazione per s sarà data da $-x + y = b$ con b da calcolare. Per trovare b basta imporre che la retta s passi per il punto $(4,1)$. L'equazione per la retta s ottenuta è:

$$-x + y = -3$$

(h) Poiché il punto B deve appartenere ad entrambe le rette deve soddisfare le loro equazioni

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + y = -3 \end{cases}$$

risolvendo il sistema lineare si ottiene

$$B = (2,-1)$$

(i) A questo punto punto la distanza tra il punto A e la retta r è data semplicimente dalla distanza tra i punti A e B dunque

$$dist(A,r) = \|A - B\| = \sqrt{(4-2)^{+}(1-(-1))^2} = 2\sqrt{2}$$

Esercizio 2

(a)

$$r = (3,0) + \langle(2,1)\rangle$$

(b)

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x - 2y = 0\}$$

(c) Una base di T è data dal vettore $(2,1)$.

(d)

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 2x + y = 0\}$$

(e)

$$W = \langle(1,-2)\rangle$$

(f)

$$s = (-1,3) + \langle(1,-2)\rangle$$

(g)

$$s = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) | 2x + y = 1\}$$

(h)

$$B = (1,-1)$$

(i)

$$dist(A, r) = 2\sqrt{5}$$

Esercizio 3

(g)

$$s = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) | 4x + 3y = 13\}$$

(h)

$$B = (4, -1)$$

(i)

$$dist(A, r) = 5$$

Esercizio 4

La risoluzione dell'esercizio 4 è molto simile a quella degli esercizi precedenti ad eccezione del fatto che ci troviamo in uno spazio di dimensione 3 invece che 2.

(a) I punti del piano π sono dati dalle soluzioni dell'equazione lineare $x+y+z = 1$. Ricavando x si ottiene $x = -y - z + 1$ dunque

$$\pi = \{(-y - z + 1, y, z) | y, z \in \mathbb{R}\} = (1, 0, 0) + \{(-y - z, y, z) | y.z \in \mathbb{R}\}$$
$$\pi = (1, 0, 0) + \langle(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle$$

dunque

$$P_1 = (1, 0, 0) \qquad \text{e} \qquad T = \langle(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle$$

(b) Per la risoluzione dei quesiti (b),(c),(d) ed (e) si procede come nell'esercizio 1 del foglio 11. Molto utile per la comprensione è la lettura della nota su sistemi lineari omogenei sempre del foglio 11.

L'equazione per T è data dalla parte omogenea dell'equazione di π quindi $x + y + z = 0$

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y + z = 0\}$$

(c) Una base di T è data dai vettori $(-1, 1, 0)$ e $(-1, 0, 1)$.

(d) Un sistema lineare di equazione che descrivono w è data dal prodotto scalare tra i vettori della base di T ed il vettore delle ingognite (x, y, z)

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -x + y = 0, -x + z = 0\}$$

(e)

$$W = \langle(1, 1, 1)\rangle$$

(f) Sappiamo che la retta s passa per A e abbiamo già calcolato lo spazio W in (e) quindi

$$s = (2, 3, 2) + \langle(1, 1, 1)\rangle$$

(g) In (d) abbiamo calcolato un sistema di equazioni minimali per W, un sistema per s sarà data da $-x+y=b_1$ e $-x+z=b_2$con b_1 e b_2 da calcolare. Per trovare b basta imporre che la retta s passi per il punto $(2,3,2)$. Il sistema ottenuto è:

$$\begin{cases} -x+y=1 \\ -x+z=0 \end{cases}$$

(h) Poiché il punto B deve appartenere sia alla retta s che al piano π allora deve soddisfare le loro equazioni

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x+y=1 \\ -x+z=0 \end{cases}$$

risolvendo il sistema lineare si ottiene

$$B=(0,1,0)$$

(i) A questo punto punto la distanza tra il punto A e il piano π è data semplicimente dalla distanza tra i punti A e B dunque

$$dist(A,r)=\|A-B\|=\sqrt{(2-0)^{+}(3-(1))^2+(2-0)^2}=2\sqrt{3}$$

Esercizio 5

(a)

$$\pi=(-2,0,0)+\langle(-3,1,0),(-\tfrac{3}{2},0,1)\rangle$$
$$\pi=(-2,0,0)+\langle(-3,1,0),(-3,0,2)\rangle$$

dunque

$$P_1=(-2,0,0) \qquad \text{e} \qquad T=\langle(-3,1,0),(-3,0,2)\rangle$$

(b) $2x+6y+3z=0$

$$T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|2x+6y+3z=0\}$$

(c) Una base di T è data dai vettori $(-3,1,0)$ e $(-3,0,2)$.

(d)

$$\begin{cases} -3x+y=0 \\ -3x+2z=0 \end{cases}$$

$$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|-3x+y=0,-3x+2z=0\}$$

(e)

$$W=\langle(2,6,3)\rangle$$

(f)

$$s=(3,4,5)+\langle(2,6,3)\rangle$$

(g)

$$\begin{cases} -3x+y=-5 \\ -3x+2z=1 \end{cases}$$

(h)
$$B = (1, -2, 2)$$
(i)
$$dist(A, r) = 7$$

Esercizio 6
$dist(\pi, A) = 6$
Esercizio 7
(a) I punti della retta r sono dati dalle soluzioni del sistema lineare. dopo aver risolto il sistema lineare si ottiene:

$$\begin{aligned} &r = \{(2z + 11, 1, z) | z \in \mathbb{R}\} = (11, 1, 0) + \{(2z, 0, z) | z \in \mathbb{R}\} \\ &r = (11, 1, 0) + \langle(2, 0, 1)\rangle \end{aligned}$$

dunque
$$P_1 = (11, 1, 0) \qquad \text{e} \qquad T = \langle(2, 0, 1)\rangle$$

(b) Per la risoluzione dei quesiti (b),(c),(d) ed (e) procede ancora in maniera simile a quanto fatto nel foglio 11.
Le equazioni per T sono date dalla parte omogenea delle equazioni di r quindi

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2z = 0, y = 0\}$$

(c) Una base di T è data dal vettore $(2, 0, 1)$.
(d) Un sistema lineare di equazione che descrivono w è data dal prodotto scalare tra i vettori della base di T ed il vettore delle ingognite (x, y, z), si tratta di una sola equazione,

$$2x + z = 0$$

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + z = 0\}$$

(e)
$$W = \langle(1, 0, -2), (0, 1, 0)\rangle$$

(f) Sappiamo che il piano π passa per A e abbiamo già calcolato lo spazio W in (e) quindi

$$s = (-1, 0, 4) + \langle(1, 0, -2), (0, 1, 0)\rangle$$

(g) In (d) abbiamo calcolato un sistema di equazioni minimali per W, un sistema per π sarà data da $2x + z = b_1$ con b da calcolare. Per trovare b basta imporre che il piano π passi per il punto $(-1, 0, 4)$. Il sistema ottenuto è costituito da una sola equazione:

$$2x + z = 2$$

(h) Poiché il punto B deve appartenere sia alla retta s che al piano π allora deve soddisfare le loro equazioni

$$\begin{cases} 2x + z = 2 \\ x - 2z = 11 \\ y = 1 \end{cases}$$

risolvendo il sistema lineare si ottiene

$$B = (3, 1, -4)$$

(i) A questo punto punto la distanza tra il punto A e la retta r è data semplicimente dalla distanza tra i punti A e B dunque

$$dist(A, r) = \|A - B\| = \sqrt{(4)^2 + (1)^2 + (-8)^2} = 9$$

Esercizio 8
$dist(r, A) = 7$