Esercizi 13
09\06\2016
Esercizi numero 6 degli appelli 2014-2015

David Barbato

Appello 1 2014-2015

Esercizio 6.
In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ siano r ed s le seguenti rette:
$r = (1, 1, 0) + \langle(0, 0, 1)\rangle$
$s = (-1, 0, 1) + \langle(0, 1, 1)\rangle$
Calcolare la distanza tra le due rette ed i punti di minima distanza Q_1 e Q_2.

Appello 2 2014-2015

Esercizio 6.
In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ siano π_1 ed π_2 i seguenti piani:
$\pi_1 = P_1 + T_1$ con $P_1 = (1, 0, 1)$ e $T_1 = \langle(0, 1, -1), (1, -1, 0)\rangle$;
$\pi_2 = P_2 + T_2$ con $P_2 = (1, 1, 0)$ e $T_2 = \langle(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle$.
Siano inoltre $r = \pi_1 \cap \pi_2$, $W_1 = T_1^\perp$ e $W_2 = T_2^\perp$.
(a) Mostrare che i piani π_1 e π_2 non sono paralleli.
(b) Trovare una base per W_1 e una per W_2.
(c) Determinare delle costanti a, b, c e a', b', c' tali che: T_1 è lo spazio delle soluzioni di $ax+by+cz = 0$ e T_2 è lo spazio delle soluzioni di $a'x+b'y+c'z = 0$.
(d) Determinare le equazioni cartesiane per π_1 e π_2.
(e) Determinare (se esistono) un punto $P \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ ed un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $r = P + \langle v\rangle$.
(f) Determinare il fascio di piani Φ che ha come luogo fisso la retta r.
(g) Sia $P_3 = (1, 1, 1) \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Determinare, se esiste, un piano π_3 del fascio Φ passante per P_3.

Appello 3 2014-2015

Esercizio 6.
Siano P_1 e P_2 due punti di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, sia v un vettore di $\mathbb{R}^3$, sia $T := \langle v \rangle$ e $W := T^\perp$. Consideriamo inoltre in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ la retta $r = P_1 + \langle v \rangle$ e il piano $\pi = P_2 + W$ sia infine P_3 il punto di intersezione tra il piano π e la retta r. Assumiamo che P_1, P_2 e v siano dati:

$$P_1 = (2, -3, -1) \qquad P_2 = (5, -3, 5) \qquad v = (-1, 2, 2)$$

(a) Determinare un sistema lineare minimale per W.
(b) Trovare una base per W.
(c) Determinare un sistema lineare minimale per T.
(d) Determinare un'equazione per il piano π.
(e) Determinare un sistema lineare di equazioni minimali per la retta r.
(f) Calcolare le coordinate del punto P_3.
(g) Calcolare la distanza tra il punto P_2 e la retta r.
(h) Calcolare la distanza tra il punto P_1 e il piano π.

Appello 4 2014-2015

Esercizio 6.
In $\mathbb{R}^3$ consideriamo i sottospazi vettoriali $W_1 = \langle (1, 1, 0) \rangle$ e $T_2 = \langle (1, 0, -1), (1, -1, 1) \rangle$, siano inoltre $T_1 := W_1^\perp$ e $W_2 := T_2^\perp$. In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ siano assegnati i punti $P_1 = (0, -3, 2)$ e $P_2 = (0, 1, 0)$ siano infine $r := P_1 + W_1$ e $\pi := P_2 + T_2$.

(a) Trovare una base per T_1.

(b) Trovare una base per W_2.

(c) Gli spazi T_1 e T_2 sono diversi?

(d) Determinare un sistema lineare minimale per T_1

(e) Determinare un sistema lineare minimale per W_2

(f) Determinare un'equazione cartesiana per π

(g) Determinare due equazioni cartesiane per r

(h) Determinare (se esistono) i punti di intersezione tra r e π.

Soluzioni

Esercizio 6 (appello 2)
(a) I due piani sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura, applicando Gauss-Jordan ai generatori di T_1 e T_2 otteniamo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Gauss-Jordan} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Gauss-Jordan} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque T_1 e T_2 non sono uguali e quindi π_1 e π_2 non sono paralleli.
(b) Possiamo ottenere un sistema di equazioni per W_1 e W_2 utilizzando i generatori di T_1 e T_2. La cosa più conveniente è di utilizzare le basi ottenute con Gauss-Jordan al punto (a) in modo da avere il sistema già a scalini. I sistemi ottenuti sono

$$\begin{cases} x - z &= 0 \\ y - z &= 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$$

dai quali otteniamo:

$$W_1 = \{(z, z, z) | z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 1) \rangle$$

$$W_2 = \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 0, 1) \rangle$$

quindi

$$\mathcal{B}_{W_1} = \{(1, 1, 1)\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{B}_{W_2} = \{(0, 0, 1)\}$$

(c) Questa parte è simile a quanto fatto nell'esercizio 3 dello stesso appello.
Per T_1 si ha $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ e quindi $x + y + z = 0$.
Per T_2 si ha $(a', b', c') = (0, 0, 1)$ e quindi $z = 0$.
(d) Le equazioni per π_1 e π_2 sono del tipo $x + y + z = d$ e $z = d'$. Poiché sappiamo che P_1 e P_2 devo appartenere rispettivamente ai piani π_1 e π_2 allora per calcolare d e d' basta sostituire le coordinate di P_1 nella prima equazione e quelle di P_2 nella seconda equazione. Sostituendo otteniamo:

$$x + y + z = 2 \qquad \text{e} \qquad z = 0$$

(e) Poiché r è l'intersezione dei due piani, per trovare r basta risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x + y + z &= 2 \\ z &= 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene:

$$r = \{(-y+2, y, 0) | y \in \mathbb{R}\} = (2,0,0) + \langle(-1,1,0)\rangle$$

(f) Il fascio di piani Φ è ottenuto ponendo uguali a zero le combinazioni lineari delle due equazioni di r: $x+y+z-2=0$ e $z=0$.

$\alpha \cdot (x+y+z-2) + \beta \cdot z = 0$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli.

(g) Basta sostituire le coordinate del punto P_3 nel fascio di rette ottenuto al punto (f) e ricavare dei valori di α e β che soddisfano l'equazione ottenuta. (Attenzione i valori di α e β non possono essere entrambi nulli e non sono unici)

$$\alpha \cdot (1+1+1-2) + \beta \cdot 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha + \beta = 0$$

Per esempio scegliendo $\alpha = 1$ e $\beta = -1$ si ottiene il piano di equazione:

$$x + y - 2 = 0 \ .$$

Esercizio 6 (appello 3)
$\mathcal{B}_T = \{(-1,2,2)\}$
(a) $W: \quad -x+2y+2z=0$
(b) Da (a) si ricava $x = 2y+2z$ e dunque $W = \{(2y+2z, y, z) | y, z \in \mathbb{R}\}$.
$\mathcal{B}_W = \{(2,1,0),(2,0,1)\}$
(c) $T: \quad \begin{cases} 2x+y=0 \\ 2x+z=0 \end{cases}$
(d) $\pi: \quad -x+2y+2z=-1$
(e) $r: \quad \begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x+z=3 \end{cases}$
(f) risolvendo il sistema $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x+z=3 \\ -x+2y+2z=-1 \end{cases}$ si ottiene $P_3 = (1,-1,1)$
(g) $\|P_2 - P_3\| = 6$
(h) $\|P_1 - P_3\| = 3$