

Esercizi 1
08\03\2016
Numeri complessi e polinomi

David Barbato

Esercizio 1. *Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi:*

(a) $z = (1 + i)(1 - 2i)$

(b) $z = \frac{13}{3+2i}$

(c) $z = \frac{26}{3i-2}$

(d) $z = \frac{2+i}{3-2i}$

(e) $z = \frac{1+i}{(1-3i)(i-3)}$

Esercizio 2. *Determinare modulo ed argomento dei seguenti numeri complessi:*

(a) $z = 3 + 3i$

(b) $z = 2i - 2\sqrt{3}$

(c) $z = -3 - 3\sqrt{3}i$

(d) $z = 1 - i$

Esercizio 3. *Determinare la forma algebrica dei seguenti numeri complessi a partire dal modulo e dall'argomento:*

(a) $|z| = 1, \quad \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{6}$

(b) $|z| = 2\sqrt{2}, \quad \text{Arg}(z) = \frac{3}{4}\pi$

(c) $|z| = 3, \quad \text{Arg}(z) = 0$

(d) $|z| = 4, \quad \text{Arg}(z) = \frac{3}{2}\pi$

(e) $|z| = 5\sqrt{3}, \quad \text{Arg}(z) = \frac{5}{3}\pi$

(f) $|z| = 1, \quad \text{Arg}(z) = \frac{15}{2}\pi$

(g) $|z| = 2, \quad \text{Arg}(z) = 11\pi$

Indichiamo ora con 'arctan' la funzione arcotangente, funzione inversa della funzione tangente nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$.

Esercizio 4. *Determinarne modulo e argomento dei seguenti numeri. Determinare l'argomento tramite la funzione arcotangente. (Per esempio $\text{Arg}(11+7i) = \arctan(\frac{7}{11})$, $\text{Arg}(-11-7i) = \arctan(\frac{7}{11}) + \pi$)*

(a) $z = 4 + 3i$

(b) $z = 5 - 12i$

(c) $z = 6i - 8$

(d) $z = -15 - 8i$

Esercizio 5. Risolvere le seguenti equazioni. (Utilizzare la sostituzione $z = a + bi$ con a e b reali.)

(a) $z^2 = 4i - 3$

(b) $z^2 = 16 - 30i$

(c) $z^2 = 8 - 6i$

Esercizio 6. Trovare le soluzioni dei seguenti sistemi.

(a) $\begin{cases} 5\frac{z}{\bar{z}} = 4z - 5 \\ z - \bar{z} = 2i \end{cases}$

(b) $\begin{cases} z + \bar{z} = 2i \\ z - \bar{z} = 0 \end{cases}$

Esercizio 7.

(a) Dimostrare che: $\cos(2015\pi) + i\sin(2015\pi) = -1$

(b) Sia $z = \cos(\frac{\pi}{8}) + i\sin(\frac{\pi}{8})$ calcolare z^{2015}

(c) Sia $z = \cos(\frac{3}{4}\pi) + i\sin(\frac{3}{4}\pi)$ calcolare $\left((z^7)^7\right)^7$

(d) Sia $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ calcolare z^{19}

(e) Sia $z = 3i - 3$ calcolare $\frac{z^7}{729}$

(f) Sia $z = \cos(\frac{1}{2}\pi) + i\sin(2\pi)$ calcolare z^{2015}

Esercizio 8.

(a) Determinare le soluzioni di $z^5 = 32i$

(b) Determinare le soluzioni di $z^3 = 1$

(c) Determinare le soluzioni di $z^3 = 16 + 88i$ sapendo che una delle tre radici è $4 + 2i$. Utilizzare il risultato del quesito (b)

(d) Determinare la soluzione di $z^{12} = 1$ con parte immaginaria massima.

Esercizio 9. Calcolare le radici dei seguenti polinomi. Utilizzare eventualmente i risultati dell'esercizio 5

(a) $p(z) = z^2 + (1 - 2i)z - 2i$

(b) $p(z) = z^2 - 4(1 + i)z + 8i - 1$

Esercizio 10. Trovare le radici e decomporre in fattori di primo grado i seguenti polinomi.

(a) $p(z) = z^5 - z$

(b) $p(z) = z^4 - 3z^2 - 4$

(c) $p(z) = z^5 + z^4 - (4 + 2\sqrt{3}i)z^3 - (4 + 2\sqrt{3}i)z^2 + (4 + 4\sqrt{3}i)z + 4 + 4\sqrt{3}i$

Esercizio 11 (Appello 1A 2014-2015 ese 2).

Trovare le radici (in $\mathbb{C}$) e decomporre in fattori di primo grado il seguente polinomio:

$$p(z) = z^{2015} + 5z^{2013} - 36z^{2011}$$

Esercizio 12 (Appello 1B 2014-2015 ese 2).

Trovare le radici (in $\mathbb{C}$) e decomporre in fattori di primo grado il seguente polinomio:

$$p(z) = z^{2015} - (2 - i)z^{2014} + (3 - i)z^{2013}$$

Esercizio 13 (Appello 1C 2014-2015 ese 2).

Trovare le radici (in $\mathbb{C}$) e decomporre in fattori di primo grado i seguenti polinomi:

(a) $p(z) = z^3 - 1$

(b) $p(z) = z^3 - i$

Esercizio 14 (Appello 1D 2014-2015 ese 2).

Sia $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, calcolare z^{2015}

Esercizio 15 (Appello 2A 2014-2015 ese 2).

Trovare le radici (in $\mathbb{C}$) e decomporre in fattori di primo grado i seguenti polinomi:

(a) $p(z) = z^4 - 1$

(b) $p(z) = z^4 + \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

Esercizio 16 (Appello 2B 2014-2015 ese 2).

Trovare le radici (in $\mathbb{C}$) e decomporre in fattori di primo grado il seguente polinomio:

$$p(z) = z^{12} + z^8 - z^4 - 1$$

Esercizio 17 (Appello 2C 2014-2015 ese 2).

Sia $z = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$, trovare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a + bi = z^{2015}$.

Esercizio 18 (Appello 2D 2014-2015 ese 2).

Trovare le radici (in $\mathbb{C}$) e decomporre in fattori di primo grado i seguenti polinomi:

(a) $p(z) = z^4 - 1$

(b) $p(z) = z^4 + \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$

Esercizio 19 (Appello 3A 2014-2015 ese 2).

Determinare le radici di $z^4 + 7 - 24i = 0$ sapendo che una delle radici è $z_1 = 2 + i$

Esercizio 20 (Appello 3B 2014-2015 ese 2).

Determinare le radici di $z^4 + 7 + 24i = 0$ sapendo che una delle radici è $z_1 = 2 - i$

Esercizio 21 (Appello 4 2014-2015 ese 2).

Trovare le radici (in $\mathbb{C}$) e decomporre in fattori il seguente polinomio:

$$p(z) = 2z^{2016} + 16z^{2014} - 2016z^{2012}$$

Soluzioni

Esercizio 1 a) $3 - i$ b) $3 - 2i$ c) $-4 - 6i$ d) $\frac{4}{13} + \frac{7}{13}i$ e) $\frac{1}{10} - \frac{1}{10}i$

Esercizio 2 a) $|z| = 3\sqrt{2}$, $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$. b) $|z| = 4$, $\arg(z) = \frac{5}{6}\pi$.
c) $|z| = 6$, $\arg(z) = \frac{4}{3}\pi$. d) $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \frac{7}{4}\pi$.

Esercizio 3 a) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. b) $z = -2 + 2i$. c) $z = 3$. d) $-4i$. e)
 $z = \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{15}{2}i$. f) $z = -i$. g) $z = -2$.

Esercizio 4 a) $|z| = 5$, $\arg(z) = \arctan(\frac{3}{4})$. b) $|z| = 13$, $\arg(z) = \arctan(-\frac{12}{5})$. c) $|z| = 10$, $\arg(z) = \arctan(-\frac{3}{4}) + \pi$. d) $|z| = 17$, $\arg(z) = \arctan(\frac{8}{15}) + \pi$.

Esercizio 5 a) $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -1 - 2i$. b) $z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = 3i - 5$.
c) $z_1 = 3 - i$, $z_2 = i - 3$.

Esercizio 6 a) $z_1 = 2 + i$, $z_2 = \frac{1}{2} + i$. b) Nessuna soluzione.

Esercizio 7

a) $2015\pi = 2\pi \cdot 1007 + \pi$ dunque $\cos(2015\pi) + i \sin(2015\pi) = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1$.

b) $z^{2015} = \cos(\frac{2015}{8}\pi) + i \sin(\frac{2015}{8}\pi)$ infine poichè $\frac{2015}{8}\pi = 2\pi \cdot 125 + \frac{15}{8}\pi$ allora si ha: $z^{2015} = \cos(\frac{15}{8}\pi) + i \sin(\frac{15}{8}\pi)$.

c) $\left((z^7)^7\right)^7 = z^{343} = \left(e^{\frac{3}{4}\pi i}\right)^{343} = e^{\frac{1029}{4}\pi i} = e^{2\pi i \cdot 128 + \frac{5}{4}\pi i} = e^{\frac{5}{4}\pi i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

d) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

e) $-24 - 24i$

f) 0

Esercizio 8

a) In forma esponenziale si ha $z = \rho e^{\theta i}$ e dunque $z^5 = \rho^5 e^{5\theta i}$ mentre vale $32i = 2^5 e^{(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i}$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Dunque $\rho = 2$ e $5\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ovvero

$$\theta = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{5} = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \quad \text{e} \quad z = 2e^{(\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5})i}$$

Per la periodicità dell'esponenziale complesso ci sono 5 soluzioni distinte che si possono ottenere con le sostituzioni $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Da cui si ottiene:

$$z_1 = 2e^{\frac{1}{10}\pi i},$$

$$z_2 = 2e^{\frac{5}{10}\pi i} = 2e^{\frac{\pi}{2}i} = 2i,$$

$$z_3 = 2e^{\frac{9}{10}\pi i},$$

$$z_4 = 2e^{\frac{13}{10}\pi i},$$

$$z_5 = 2e^{\frac{17}{10}\pi i},$$

- b) $z_1 = 1, z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
 c) $z_1 = 4 + 2i, z_2 = -(2 + \sqrt{3}) + (2\sqrt{3} - 1)i, z_3 = \sqrt{3} - 2 - (2\sqrt{3} + 1)i$
 d) i

Esercizio 9

- a) $z_1 = 2i, z_2 = -1, z_3 = 3 + 2i, z_4 = 1 + 2i$

Esercizio 10

- a) $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = i, z_4 = -1, z_5 = -i, p(z) = z(z-1)(z-i)(z+1)(z+i)$
 b) ponendo $y = z^2$ si ottiene $y_1 = 4$ e $y_2 = -1$ da cui si ricava $p(z) = (z^2 - 4)(z^2 + 1) = (z - 2)(z + 2)(z - i)(z + i)$, mentre le soluzioni sono: $z_1 = 2, z_2 = -2, z_3 = i, z_4 = -i$,
 c) E' chiaro che la disposizione dei coefficienti a due a due uguale permette di raccogliere un fattore $z + 1$ dunque

$$p(z) = (z + 1)(z^4 - (4 + 2\sqrt{3}i)z^2 + 4 + 4\sqrt{3}i)$$

Con la sostituzione $y = z^2$ si ricava $y_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$ e $y_2 = 2$ dunque

$$p(z) = (z+1)(z^2 - (2+2\sqrt{3}i))(z^2 - 2) = (z+1)(z^2 - (2+2\sqrt{3}i))(z - \sqrt{2})(z + \sqrt{2})$$

resta da decomporre il fattore $z^2 - (2 + 2\sqrt{3}i)$ ovvero bisogna risolvere l'equazione $z^2 = (2 + 2\sqrt{3}i)$. Calcolandone il modulo si ottiene $|2 + 2\sqrt{3}i| = 4$ quindi mettendo in evidenza il modulo l'equazione diventa $z^2 = 4(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$ a questo punto diventa evidente che $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})$ quindi

$$z^2 = \rho^2 e^{2\theta i} = 2^2 e^{(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)i}$$

da cui si ricava $\rho = 2$ e $2\theta = (\frac{\pi}{3} + 2k\pi)$ dunque le due soluzioni sono $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{6}i} = \sqrt{3} + i$ e $z_2 = 2e^{\frac{7}{6}\pi i} = -\sqrt{3} - i$.

$$p(z) = (z + 1)(z - (\sqrt{3} + i))(z + \sqrt{3} + i)(z - \sqrt{2})(z + \sqrt{2})$$

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

Esercizio 15

- (a) Le radici sono ± 1 e $\pm i$. la decomposizione è $p(z) = (z - 1)(z + 1)(z -$

i)(z + 1)

(b) Occorre risolvere:

$$Z^4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i. \quad (1)$$

Osserviamo che $\left| -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = 1$ e in particolare vale $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{2}{3}\pi i}$ quindi le soluzioni di (1) avranno la forma $z = e^{\theta i}$ con

$$e^{4\theta i} = e^{\frac{2}{3}\pi i}$$

quindi

$$4\theta = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

da cui ricaviamo le 4 soluzioni $\theta_1 = \frac{1}{6}\pi$, $\theta_2 = \frac{4}{6}\pi$, $\theta_3 = \frac{7}{6}\pi$ e $\theta_4 = \frac{10}{6}\pi$. Quindi le radici sono:

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

e vale

$$p(z) = \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \left(z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \left(z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

Esercizio 16

$$p(z) = z^8(z^4 + 1) - (z^4 + 1) = (z^8 - 1)(z^4 + 1) = (z^4 - 1)(z^4 + 1)^2$$

le radici di $z^4 - 1 = 0$ sono ∓ 1 e $\mp i$. Per trovare le radici di $z^4 + 1 = 0$ bisogna risolvere $z^4 = -1$, ponendo $z = e^{\theta i}$ si ha: $e^{4\theta i} = e^{\pi i}$ da cui si ricava rapidamente $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, $\theta_2 = \frac{3\pi}{4}$, $\theta_3 = \frac{5\pi}{4}$, $\theta_4 = \frac{7\pi}{4}$, quindi

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i) \quad z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i) \quad z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$$

$$p(z) = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i) \left(z - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^2 \left(z + \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^2 \left(z + \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^2 \left(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^2$$

Esercizio 17

Prima di tutto osserviamo che vale $\left| \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i) \right| = 1$ e $z = e^{\frac{\pi}{3}i}$.

$$z^{2015} = e^{\frac{2015}{3}\pi i} =$$

poiché vale $\frac{2015}{3} = 741 + \frac{2}{3}$ allora si ha

$$z^{2015} = e^{(741 + \frac{2}{3})\pi i} = e^{740\pi i + \pi i + \frac{2}{3}\pi i} = e^{740\pi i} \cdot e^{\pi i} \cdot e^{\frac{2}{3}\pi i}$$

infine poiché

$$e^{740\pi i} = 1 \qquad e^{\pi i} = -1 \qquad e^{\frac{2}{3}\pi i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

allora si può concludere:

$$z^{2015} = 1 \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i)$$

Esercizio 18

(a) Le radici sono ± 1 e $\pm i$. la decomposizione è $p(z) = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i)$

(b) Analogamente a quanto visto nell'esercizio 16 le radici sono:

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

e vale

$$p(z) = \left(z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \left(z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

Esercizio 19 Determinare le radici di $z^4 + 7 - 24i = 0$ sapendo che una delle radici è $z_1 = 2 + i$

Soluzione

Bisogna risolvere l'equazione

$$z^4 = -7 + 24i$$

sapendo che $z_1 = 2 + i$ è una soluzione ovvero sappiamo che $z_1^4 = -7 + 24i$.

Sappiamo che le radici quarte dell'unità sono $\{1, -1, i, -i\}$ cioè vale

$$1^4 = (-1)^4 = i^4 = (-i)^4 = 1. \text{ Dunque}$$

$$(1 \cdot z_1)^4 = (-1 \cdot z_1)^4 = (i \cdot z_1)^4 = (-i \cdot z_1)^4 = -7 + 24i$$

quindi le soluzioni dell'equazione $z^4 = -7 + 24i$ sono:

$$z_1 = 1 \cdot (2 + i) = 2 + i$$

$$z_2 = -1 \cdot (2 + i) = -2 - i$$

$$z_3 = i \cdot (2 + i) = -1 + 2i$$

$$z_4 = -i \cdot (2 + i) = 1 - 2i$$

Esercizio 20