Esercizi 2
15\03\2016

David Barbato

Esercizio 1. *Sia $V = \mathbb{R}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi in x. Consideriamo i seguenti insieme di polinomi:*

$$U_1 := \{ax + b | a, b \in \mathbb{R}\} \qquad U_2 := \{ax^3 + b | a, b \in \mathbb{R}\}$$

(a) Dimostrare che U_1 e U_2 sono sottospazi vettoriali di V.
(b) Descrivere il sostospazio vettoriale $W = U_1 \cap U_2$.
(c) Descrivere il sostospazio vettoriale $T = U_1 + U_2$.
(d) Mostrare che l'insieme $S = U_1 \cup U_2$ non è un sottospazio vettoriale di V.

Esercizio 2. *Siano $v_1, \ldots, v_n$ vettori di uno spazio vettoriale V, sia λ uno scalare. Siano inoltre $u_1, \ldots, u_n$, i vettori definiti come segue:*

$$u_1 := v_1 \qquad \ldots \qquad u_{n-1} := v_{n-1} \qquad u_n := \lambda v_1 + v_n$$

Posto $S := \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $T := \{u_1, \ldots, u_n\}$ dimostrare che

$$\langle S \rangle = \langle T \rangle \ .$$

Esercizio 3. *Siano $v_1, \ldots, v_n$ vettori non nulli di un $\mathbb{R}$ spazio vettoriale V, sia λ uno scalare diverso da zero. Siano inoltre $u_1, \ldots, u_n$, i vettori definiti come segue:*

$$u_1 := v_1 \qquad \ldots \qquad u_{n-1} := v_{n-1} \qquad u_n := \lambda v_n$$

Posto $S := \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $T := \{u_1, \ldots, u_n\}$ dimostrare che

$$\langle S \rangle = \langle T \rangle \ .$$

A cosa è servita l'ipotesi λ diverso da zero?

Esercizio 4. *Quali dei seguenti sottoinsieme dello spazio vettoriale* $\mathbb{R}^3$ *sono sottospazi vettoriali? (Per ciascun insieme dimostrare che è un sottospazio vettoriale oppure mostrare con un esempio che non lo è.)*

(a) $A = \{(a,b,c)|\ a,b,c \in \mathbb{R},\ \ a+b = 2c\}$
(b) $B = \{(a,b,c)|\ a,b,c \in \mathbb{R},\ \ |a+b| = 2\}$
(c) $C = \{(a,b,c)|\ a,b,c \in \mathbb{R},\ \ a^2+b^2 = c\}$
(d) $D = \{(a,b,c)|\ a,b,c \in \mathbb{R},\ \ ab = c\}$
(e) $E = \{(a,b,c)|\ a,b,c \in \mathbb{R},\ \ a^2+b^2 = c^2\}$
(f) $F = \{(a,b,c)|\ a,b,c \in \mathbb{R},\ \ a = 0, b^2 = 0, c^3 = 0\}$
*(g)*** $G = \{(a,b,c)|\ a,b,c \in \mathbb{R},\ \ (a^2+b^2)^2 = a^2+b^2,\ \ |a|+|b| < 1\}$

Esercizio 5. *Sia* $V = \mathbb{R}^3$ *spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ *con le usuali operazioni. Per ogni* $t \in \mathbb{R}$ *sia* $S_t := \{(0,t,0),(1,0,t),(0,t,1)\}$. *Per quali valori di* t *in* $\mathbb{R}$ *si ha:*

$$\langle S_t \rangle = V$$

Esercizio 6. *Sia* $V = \mathbb{R}^3$ *spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ *con le usuali operazioni. Sia* $S := \{(0,1,0),(2,1,1),(1,0,1),(0,-2,0),(3,3,3)\}$. *Determinare tutti i sottoinsiemi* T *di* S *composti da tre elementi tali che:*

$$\langle T \rangle = V$$

Esercizio 7. *Sia* $V = \mathbb{C}^2$ *spazio vettoriale su* $\mathbb{C}$ *con le usuali operazioni. Sia* $S := \{(1,1),(2,i),(1,0),(-2i,0),(0,0)\}$. *Dimostrare che* $\langle S \rangle = V$. *Determinare tutti i sottoinsiemi* T *di* S *composti da 2 elementi tali che:*

$$\langle T \rangle = V$$

Soluzioni

Esercizio 1
a) Dimostreremo che U_1 è un sottospazio vettoriale di V. La dimostrazione per U_2 è analoga.
Affinché U_1 sia un sottospazio vettoriale di V devono essere soddisfatte le seguenti tre condizioni:

1. 0_V appartiene a U_1
2. U_1 è chiuso rispetto alla somma
3. U_1 è chiuso rispetto al prodotto per scalare

vale
$$U_1 := \{ax + b | a, b \in \mathbb{R}\}$$
1) Scegliendo $a = b = 0$ si ottiene $ax + b = 0$ appartiene a U_1.
2) Siano v_1 e v_2 vettori di U_1 allora per la definizione precedente esistono a_1, b_1, a_2, b_2 tali che
$$v_1 = a_1x + b_1 \qquad v_2 = a_2x + b_2$$
posto $v_3 := v_1 + v_2$, $a_3 = a_1 + a_2$ e $b_3 = b_1 + b_2$ allora vale $v_3 = (a_1 + a_2)x + b_1 + b_2 = a_3x + b_3$ quindi anche v_3 appartiene a U_1.
3) Siano $v \in U_1$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Poiché $v \in U_1$ allora esistono a e B tali che $v = a_1x + b_1$ se poniamo $u := \lambda \cdot v$, $a_2 := \lambda a_1$ e $b_2 := \lambda b_1$ allora si ha $u = a_2x + b_2$ quindi anche $u := \lambda \cdot v$ appartiene a U_1.

b) $W = \{a | a \in \mathbb{R}\}$

c) $W = \{ax^3 + bx + c | a, b, c \in \mathbb{R}\}$

d) I polinomi $v_1 = x$ e $v_2 = x^3$ appartengono rispettivamente a U_1 e U_2 quindi appartengono entrambi a $U_1 \cup U_2$ ma la loro somma $v_3 = v_1 + v_2 = x^3 + x$ non appartiene né ad U_1 né a U_2 quindi non appartiene a $U_1 \cup U_2$.

Esercizio 2
Per la proprietà transitiva della combinazione lineare basterà mostrare che gli elementi di S sono combinzione lineare degli elementi di T e viceversa. Che gli elementi di T siano combinazioni lineari degli elementi di S segue immediatamente dalla definzione dei vettori u_i:
$$u_1 = v_1 \qquad \ldots \qquad u_{n-1} = v_{n-1} \qquad u_n = \lambda v_1 + v_n$$

Per quanto riguarda i vettori v_i è sufficiente calcolare l'ultimo $v_n = u_n - \lambda v_1 = u_n - \lambda u_1$ quindi si ha

$$v_1 = u_1 \qquad \dots \qquad v_{n-1} = u_{n-1} \qquad v_n := u_n - \lambda u_1$$

Esercizio 4

a) Si. Per dimostrare $A \leq V$ occorre verificare che $0_V \in A$ e che A è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalare.
b) No perché 0_V non appartiene a B.
c) No perché $(1,0,1)$ appartiene a C ma $2 \cdot (1,0,1) = (2,0,2)$ non appartiene a C.
d) No perché $(1,1,1)$ appartiene a D ma $2 \cdot (1,1,1) = (2,2,2)$ non appartiene a D.
e) No perché $(1,0,1)$ e $(-1,0,1)$ appartengono a E ma $(1,0,1)+(-1,0,1) = (0,0,2)$ non appartiene a E.
f) Si perché l'unico elemento di F è l'elemento neutro: $F = \{0_V\}$.
g) Si può dimostrare che vale $G := \{(0,0,c) | c \in \mathbb{R}\}$ e G è chiaramente uno spazio vettoriale.

Esercizio 5

Occorre provare a risolvere l'equazione:

$$(a,b,c) = \alpha \cdot (0,t,0) + \beta \cdot (1,0,t) + \gamma \cdot (0,t,1) \tag{1}$$

è necessario capire se per ogni $a,b,c \in \mathbb{R}$ esistano $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ che rendano vera l'uguaglianza 1? Proviamo a risolvere l'equazione 1.

$$(a,b,c) = (0, \alpha t, 0) + (\beta, 0, \beta t) + (0, \gamma t, \gamma)$$

$$(a,b,c) = (\beta, \alpha t + \gamma t, \beta t + \gamma)$$

ovvero

$$\begin{cases} a = \beta \\ b = \alpha t + \gamma t \\ c = \beta t + \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = a \\ \alpha t = b - ct + at^2 \\ \gamma = c - at \end{cases}$$

I casi $t = 0$ e $t \neq 0$ vanno analizzati separatamente. Per $t = 0$ si ha: $S_0 = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,0,1)\}$ e chiaramente $(0,1,0) \notin \langle S_0 \rangle$ dunque

$$\langle S_0 \rangle \neq V$$

Se invece $t \neq 0$ allora nella seconda equazione del sistema possiamo dividere per t e otteniamo

$$\begin{cases} \beta = a \\ \alpha = \frac{b - ct + at^2}{t} \\ \gamma = c - at \end{cases}$$

dunque
$$\forall t \neq 0 \qquad \langle S_t \rangle = V$$

Esercizio 6
Ci sono 5 diversi sottoinsieme di T composti da 3 vettori che generano V:
$\{(0,1,0),(2,1,1),(1,0,1)\}$
$\{(0,1,0),(2,1,1),(3,3,3)\}$
$\{(2,1,1),(1,0,1),(0,-2,0)\}$
$\{(2,1,1),(1,0,1),(3,3,3)\}$
$\{(2,1,1),(0,-2,0),(3,3,3)\}$

Esercizio 7
Per dimostrare che S genera V è sufficiente mostrare che tutti gli elementi di V possono essere ottenuti come combinazione lineare degli elementi di S. Sia (z_1, z_2) un generico elemento di V per esempio vale $(z_1, z_2) = z_2 \cdot (1,1) + (z_1 - z_2)(1,0)$ dunque S genera V.
I sottoinsiemi di S di due elementi che generano V sono:
$\{(1,1),(2,i)\}$
$\{(1,1),(1,0)\}$
$\{(1,1),(-2i,0)\}$
$\{(2,i),(1,0)\}$
$\{(2,i),(-2i,0)\}$
Dimostreremo solo i casi $\langle\{(2,i),(1,0)\}\rangle = V$ e $\langle\{(1,0),(-2i,0)\}\rangle \neq V$. Cominciamo con la dimostrazione $\langle\{(2,i),(1,0)\}\rangle = V$. Sarà sufficiente mostrare che ogni vettore di V può essere scritto come combinazione lineare dei vettori $\{(2,i),(1,0)\}$. Sia (z_1, z_2) un generico elemento di V allora vale
$$(z_1, z_2) = \frac{z_2}{i}(2,i) + \left(z_1 - 2\frac{z_2}{i}\right)(1,0) \ .$$
Per mostrare invece che $\langle\{(1,0),(-2i,0)\}\rangle \neq V$ sarà sufficiente motrare un elemento di V che non è combinazione lineare dei vettori $\{(1,0),(-2i,0)\}$. È chiaro che il vettore $(0,1)$ non può essere ottenuto come combinazione lineare del vettori $\{(1,0),(-2i,0)\}$.