

Esercizi 3

di riepilogo

David Barbato

Esercizio 1. Ridurre in forma di Gauss Jordan le seguenti matrici.

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ a^2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ 0 & 1-a & -a & -a^2 \\ 1 & -1 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$(e) \quad \begin{pmatrix} 1+\pi & 0 & \pi+\pi^2 & 1 \\ \pi & 1 & 0 & 0 \\ \pi & 0 & \pi^2 & 1 \\ \pi & 2 & -\pi^2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(f) \quad \begin{pmatrix} a & a^2 & 1 & a^2 \\ 1 & a & -1 & 2a+a^2 \\ 1 & a & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Quali dei seguenti sottoinsieme dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono basi?

$$(a) \quad A = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

$$(b) \quad B = \{(1, 1, -1, 2), (-1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 2), (1, -1, 7, 1), (1, -1, -7, 1)\}$$

$$(c) \quad C = \{(1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), (3, 4, 5, 6), (4, 5, 6, 7)\}$$

$$(d) \quad D = \{(1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$$

$$(e) \quad E = \{(1, 2, 3, 4), (-1, -2, -3, -4), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$$

Esercizio 3. Per quali valori del parametro reale t , l'insieme $A := \{(t, 2, 0), (0, t+1, 1), (-t^3, 2t, 2)\}$ è una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$?

Esercizio 4. Sia $S := \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. A partire da ciascuno dei seguenti insiemi di vettori linearmente indipendenti, costruire una base utilizzando i vettori di S . (Per esempio nel quesito (a) occorre trovare una base che contenga A e sia contenuta in $A \cup S$).

(a) $A = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0)\}$

(b) $B = \{(1, 0, 1, 0)\}$

(c) $C = \{(1, 0, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (0, 1, 2, 3)\}$

(d) $D = \{(1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$

(e) $E = \{\}$

Esercizio 5. Estrarre (se possibile) da ciascuno dei seguenti insiemi una base di $\mathbb{R}^3$. (Per esempio nel quesito (a) occorre trovare tre vettori di A che formano una base).

(a) $A = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (3, 1, 0), (1, 2, 3)\}$

(b) $B = \{(1, -1, 0), (-1, 0, 1), (3, 1, -4), (1, 1, -2), (1, 1, 1)\}$

(c) $C = \{(1, -1, 0), (-1, 0, 1), (-1, 1, 0), (1, -2, 1)\}$

(d) $D = \{(1, -1, 0), (-1, 0, 1), (1, 0, 0)\}$

(e) $E = \{(1, 0, 0), (-1, 0, 1)\}$

Soluzioni Esercizio 1

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(e)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \pi & 0 \\ 0 & 1 & -\pi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(f)

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 1 & -a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Per quanto visto a lezione $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 4 e A ne è la base canonica.

a) Sì.

b) Non è una base perché è costituita da 5 elementi.

c) L'insieme C non è una base perché i suoi elementi non sono linearmente indipendenti, per esempio vale $v_2 - v_1 = v_4 - v_3$ oppure $v_3 = 2v_2 - v_1$.

d) Sì l'insieme D è una base. Poiché sappiamo che $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 4 e D è costituito da 4 elementi per dimostrare che D è una base basterà mostrare

che i quattro vettori generano $\mathbb{R}^4$ ovvero che il rango della matrice a scalini è 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} H_{3,1}(-1) \\ H_{4,1}(-1) \end{smallmatrix}]{H_{2,1}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_{2,3}} ()$$

$$\xrightarrow{S_{2,3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} H_{4,2}(-1) \end{smallmatrix}]{H_{3,2}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'ultima matrice ottenuta è una matrice a scalini con 4 Pivot quindi ha rango 4, quindi lo spazio generato dai vettori dell'insieme D ha dimensione 4 e non può che essere $\mathbb{R}^4$.

e) L'insieme E chiaramente non è una base perché $(1, 2, 3, 4) + (-1, -2, -3, -4) = 0$

Esercizio 3

$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

Esercizio 4

a) $\mathcal{B} = A \cup \{(0, 0, 0, 1)\}$

b) Ci sono due risposte possibili:

$\mathcal{B} = \{(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$

$\mathcal{B} = \{(1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$

c) Ci sono tre risposte possibili:

$\mathcal{B} = \{(1, 0, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (0, 1, 2, 3), (1, 0, 0, 0)\}$

$\mathcal{B} = \{(1, 0, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (0, 1, 2, 3), (0, 0, 1, 0)\}$

$\mathcal{B} = \{(1, 0, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (0, 1, 2, 3), (0, 0, 0, 1)\}$

mentre $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (0, 1, 2, 3), (0, 1, 0, 0)\}$ non è una base!

d) D è già una base senza bisogno di aggiungere ulteriori vettori.

e) $\mathcal{B} = S$

Esercizio 5

a) Ci sono tre risposte possibili

$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 2, 3)\}$

$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (3, 1, 0), (1, 2, 3)\}$

$\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (3, 1, 0), (1, 2, 3)\}$

b) Va bene qualunque combinazione di tre vettori purché contenga il vettore $(1, 1, 1)$.

c) Non è possibile estrarre una base dall'insieme C poiché l'insieme C non genera $\mathbb{R}^3$. Per dimostrare che C non genera $\mathbb{R}^3$ è sufficiente scrivere la matrice associata ai vettori di C e calcolarne il rango,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Gauss} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice ridotta a scalini ha due pivot, quindi ha rango due e lo spazio generato da C ha dimensione 2 e non può essere $\mathbb{R}^3$.

d) D è già una base di $\mathbb{R}^3$ infatti applicando il metodo di riduzione di Gauss si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Gauss} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Due soli vettori non possono essere sufficienti per generare $\mathbb{R}^3$.