Esercizi 4
30\03\2016

David Barbato

Esercizio 1. *Sono assegnati due sottospazi W_1 e W_2. Determinare la dimensione ed una base dei sottospazi $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$. Indicare inoltre se la somma è diretta.* (`Sugg: può essere utile la formula di Grassmann.`)
(a) $W_1 = \langle(1,2,1)\rangle, \quad W_2 = \langle(1,0,0),(0,0,1)\rangle$
(b) $W_1 = \langle(1,2,3)\rangle, \quad W_2 = \langle(2,3,4),(1,1,1)\rangle$
(c) $W_1 = \langle(1,0,1),(0,2,1)\rangle, \quad W_2 = \langle(1,0,0),(0,0,1)\rangle$

Esercizio 2. *Calcolare se possibile i seguenti prodotti tra matrici.*

$(a) \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$(b) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$(c) \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$(d) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$(e) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(f) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

$(g) \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

$(h) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Soluzioni

Esercizio 1
a) $dim(W_1 \cap W_2) = 0$, $dim(W_1 + W_2) = 3$.
b) $dim(W_1) = 1$, $dim(W_2) = 2$, $dim(W_1 + W_2) = 2$, $dim(W_1 \cap W_2) = 1$.

$$dim(W_1 + W_2) = 2 \qquad \Rightarrow \qquad W_1 + W_2 = W_2$$

$$dim(W_1 + W_2) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad W_1 \cap W_2 = W_1$$

Poiché $W_1 + W_2 = W_2$ allora una base di $W_1 + W_2$ è data da una base di W_2 $\mathcal{B}_{W_1+W_2} = \{(2,3,4),(1,1,1)\}$ allo stesso modo una base di $W_1 \cap W_2$ è data da: $\mathcal{B}_{W_1 \cap W_2} = \{(1,2,3)\}$
c) $dim(W_1) = 2$, $dim(W_2) = 2$, $dim(W_1 + W_2) = 3$, $dim(W_1 \cap W_2) = 1$. Poiché $dim(W_1 + W_2) = 3$ allora $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$. Per quanto riguarda $W_1 \cap W_2$ invece vale $dim(W_1 \cap W_2) = 1$, una base di $W_1 \cap W_2$ sarà costituita da un solo elemento quindi basta trovare un elemento non nullo di $W_1 \cap W_2$ ed abbiamo finito. Notiamo che $(1,0,1)$ appartiene sia a W_1 che a W_2 dunque $\mathcal{B}_{W_1} = \{(1,0,1)\}$ è una base.

Esercizio 2

(a) $\begin{pmatrix} 6 & -9 & -3 \\ -2 & 33 & 11 \\ 0 & -18 & -6 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -8 \end{pmatrix}$

(c) le matrici non possono essere moltiplicate.

(d) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} i & h & g \\ f & e & d \\ c & b & a \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$