Esercizi 6
19\04\2016
Sistemi lineari

David Barbato

Esercizio 1 (Appello 2 2014-2015 ese 3). *Dato il sistema lineare:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 & = & 0 \end{cases} \tag{1}$$

sia T lo spazio delle soluzioni e sia $W := T^{\perp}$. Determinare una base per T, una base per W, un sistema lineare minimale che abbia T come spazio delle soluzioni e un sistema lineare minimale che abbia W come insieme delle soluzioni.

Esercizio 2 (Appello 3 2014-2015 ese 3). *Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z al variare di $t \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{cases} y + (|t| - t)(z + 1) & = & 0 \\ x - y & = & 1 + t - |t| \\ y - x + (|t| + t)z & = & |t| \end{cases}$$

Esercizio 3 (Appello 1 2014-2015 ese 3). *Risolvere al variare di k in $\mathbb{R}$ il seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} x + ky & = & k^2 \\ 2ky - (y + z) & = & k^2 - 2k \\ x + y + z & = & k(k + 1) \end{cases}$$

Esercizio 4 (Appello 4 2014-2015 ese 3). *Risolvere al variare di t in $\mathbb{R}$ il seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} x + ty + tz + tw & = & t \\ tx + y + tz + tw & = & t \\ tx + ty + z + tw & = & t \\ tx + ty + tz + w & = & t \end{cases}$$

Soluzioni

Esercizio 1
Applichiamo il metodo di riduzione di Gauss Jordan alla matrice associata al sistema lineare.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Gauss-Jordan} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ci sono 3 pivot dunque T ha dimensione $4-3=1$ e W ha dimensione 3. La base per W è data da

$$\mathcal{B}_W = ((1,0,0,0),0,1,0,-1),(0,0,1,2))$$

Mentre il sistema (1) è già un sistema minimale per T. La riduzione di Gauss-Jordan ci permette di calcolare rapidamente le soluzioni del sistema (1), ci sono 3 pivot sulle prime tre colonne mentre la quarta è libera. Il sistema diventa:

$$\begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_2 - x_4 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_2 &= x_4 \\ x_3 &= -2x_4 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$T = \{(0, x_4, -2x_4, x_4) | x_4 \in \mathbb{R}\} = \langle (0,1,-2,1) \rangle$$

dunque

$$\mathcal{B}_T = (0,1,-2,1)$$

mentre un sistema minimale per W è dato da:

$$\left\{ \; x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \right.$$

Esercizio 2
Scriviamo la matrice associata al sistema e proviamo a ridurre con il metodo di Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & |t|-t & t-|t| \\ 1 & -1 & 0 & 1+t-|t| \\ -1 & 1 & t+|t| & |t| \end{array}\right) \xrightarrow{Gauss-Jordan} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & |t|-t & 1+2t-2|t| \\ 0 & 1 & |t|-t & t-|t| \\ 0 & 0 & t+|t| & 1+t \end{array}\right)$$

(E' possibile che effettuando la riduzione in maniera diversa si ottengano dei valori diversi nelle prime due posizione della terza e quarta colonna, ciò non dovrebbe modificare la discussione che segue.) Analizziamo la matrice

ottenuta, ci sono sicuramente due pivot sulle prime due colonne, mentre per il terzo pivot bisogna capire cosa succede a $t + |t|$.
Il caso $t = 0$ è molto semplice e conviene farlo separatamente. Sostituendo $t = 0$ la matrice diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

quindi essendoci un pivot sulla colonna dei termini noti, il sistema non ha soluzione.
Caso $t > 0$. Se $t > 0$ allora $|t| = t$ e dunque la matrice diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 2t & 1+t \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Poiché } t>0 \text{ possiamo dividere per } 2t]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1+t}{2t} \end{array}\right)$$

dunque per $t > 0$ la soluzione è unica e si ha $x = 1,\ y = 0,\ z = \frac{1+t}{2t}$.
Caso $t < 0$. Se vale $t < 0$ allora $t = -|t|$ ovvero $|t| = -t$ sostituendo si ha:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2t & 1+4t \\ 0 & 1 & -2t & 2t \\ 0 & 0 & 0 & 1+t \end{array}\right)$$

Si distinguono due casi se $t = -1$ allora $1 + t = 0$ e ci sono infinite soluzioni mentre se t è negativo ma diverso da -1 allora non ci sono soluzioni.
Caso $t = -1$, sostituendo si ha

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = -2z - 3 \\ y = -2z - 2 \end{cases} \qquad S_{t=-1} = \{(-2z-3, -2z-2, z) | z \in \mathbb{R})\}$$

In conclusione per $t > 0$ la soluzione è unica ed è data da: $x = 1,\ y = 0,\ z = \frac{1+t}{2t}$, per $t = -1$ ci sono infinite soluzione e sono date da: $S_{t=-1} = \{(-2z-3, -2z-2, z) | z \in \mathbb{R})\}$ ovvero $S_{t=-1} = (-3, -2, 0) + \langle(2, 2, -1)\rangle$. Per tutti gli altri valori di t ovvero $t \leq 0$ ma diverso da -1 il sistema non ha soluzioni.