

Esercizi 9
17\07\2016
*Esercizi numero 4 e 5 degli appelli
2014-2015*

David Barbato

L'esercizio 4 dell'appello 2 sarà accessibile dalla terza settimana di maggio.

Appello 1 2014-2015

Esercizio 4.

Data la matrice A :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica e geometrica.
- (b) Trovare, se esiste, una matrice $H \in GL_4$ tale che posto $D := H^{-1}AH$ si abbia D matrice diagonale.

Esercizio 5.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Sia $\mathcal{B}_1$ la base di $\mathbb{R}^2$ costituita dai vettori nell'ordine $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (1, -1)$ e sia $\mathcal{B}_2$ la base di $\mathbb{R}^3$ costituita dai vettori nell'ordine $w_1 = (1, 0, 0)$, $w_2 = (2, 0, 1)$ e $w_3 = (2, 1, 1)$. Sia infine

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche. Calcolare i coefficienti della matrice $A_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}(f)$.

Appello 2 2014-2015

Esercizio 4.

Siano T e W i due sottospazi di $\mathbb{R}^4$ definiti da:

$$T = \langle (4, 4, 3, 0), (4, 3, 3, 0), (4, -4, 3, 0) \rangle$$

$$W = \langle (3, 3, 4, 0), (3, 4, 4, 0), (3, -3, 4, 0) \rangle.$$

Sia infine A la matrice associata alla proiezione ortogonale sullo spazio T .

- (a) Stabilire se gli spazi T e W sono uguali.
- (b) Trovare una base ortonormale per T .
- (c) Calcolare i coefficienti della matrice A .

Esercizio 5.

Al variare di $t \in \mathbb{R}$ sia A_t la matrice seguente:

$$A_t := \begin{pmatrix} 4-t & 0 & t-2 \\ 2t-4 & t & 2-t \\ 2-t & 0 & t \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare gli autovalori di A_t e la loro molteplicità algebrica. (In funzione di t .)
- (b) Per quali valori di t esiste una matrice $H \in GL_3$ tale che posto $D := H^{-1}AH$ si abbia D matrice diagonale?

Appello 3 2014-2015

Esercizio 4.

Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare. Sia $\mathcal{B}_1$ la base di $\mathbb{R}^3$ costituita dai vettori nell'ordine $w_1 = (1, 0, 0)$, $w_2 = (1, 0, 1)$ e $w_3 = (2, 1, 1)$ e sia $\mathcal{B}_2$ la base di $\mathbb{R}^2$ costituita dai vettori nell'ordine $v_1 = (1, 1)$, e $v_2 = (1, -1)$. Sia infine

$$A_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

la matrice associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$.

- (a) Calcolare i coefficienti della matrice A associata ad f rispetto alle basi canoniche.
- (b) Esiste un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $g(v_1) = w_1$ e $g(v_2) = w_3$? E' unica? Se esiste ed è unica calcolare i coefficienti della matrice associata a g rispetto alle basi cononiche.

Esercizio 5.

Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da:

$$f(x, y, z) = (x + y, 2x, x - z)$$

determinare se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f .

Appello 4 2014-2015

Esercizio 4. (V. 8 punti.)

Data la matrice A :

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica e geometrica.
- (b) Trovare, se esiste, una matrice $H \in GL_4$ tale che posto $D := H^{-1}AH$ si abbia D matrice diagonale.

Esercizio 5. (V. 5 punti.)

Definiamo al variare di $t \in \mathbb{R}$ i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$

$$T_t := \langle (1, 1, t, -t), (t, t, 1, -1), (1, 1, 1, -1) \rangle$$

$$W_t := \langle (t, 1, t, -1), (0, 1 - t, 0, 1 - t), (1, 1, 1, -1) \rangle$$

- (a) Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ si ha $\dim(T_t) = 3$?
- (b) Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ si ha $\dim(W_t) = 2$?
- (c) Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ si ha $T_t = W_t$?
- (d) Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ si ha $\dim(T_t \cap W_t) = 1$?
- (e) Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ si ha $\dim(T_t + W_t) = 4$?

Soluzioni

Esercizio 4 (appello 2)

(a) Appliciamo il metodo di riduzione di Gauss Jordan alla matrice associata ai generatori di T e W .

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le matrici di Gauss-Jordan associate agli spazi vettoriali T e W sono diverse quindi T e W sono sottospazi diversi.

(b) Dalla riduzione di Gauss-Jordan otteniamo che $((1, 0, \frac{3}{4}, 0), (0, 1, 0, 0))$ è una base, osserviamo inoltre che i due vettori $(1, 0, \frac{3}{4}, 0), (0, 1, 0, 0)$ sono già ortogonali quindi per avere una base ortonormale basta renderli di norma 1.

$$\mathcal{B}_T = (v_1, v_2) \quad \text{con } v_1 = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}, 0\right) \text{ e } v_2 = (0, 1, 0, 0)$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \end{pmatrix} \overbrace{\hspace{1cm}}^{v_1} + \begin{pmatrix} v_2 \end{pmatrix} \overbrace{\hspace{1cm}}^{v_2}$$
$$A = \begin{pmatrix} \frac{16}{25} & 0 & \frac{12}{25} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{12}{25} & 0 & \frac{9}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5 (appello 2)

Calcoliamo prima di tutti il polinomio caratteristico.

$$p(\lambda) = (t - \lambda)(2 - \lambda)^2$$

Occorre a questo punto distinguere due casi: $t = 2$ e $t \neq 2$.

(a) Se $t = 2$ c'è un solo autovalore $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica 3

Se $t \neq 2$ ci sono 2 autovalori: $\lambda_1 = t$ con molteplicità algebrica 1 e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica 2.

(b) CASO $t = 2$. Se $t = 2$ allora la matrice A_t diventa:

$$A_2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$$

La matrice A_2 è chiaramente diagonalizzabile (è già diagonale).

CASO $t \neq 2$. Riassumendo si ha:

$$\lambda_1 = t, \text{ m.a.}(\lambda_1) = 1$$

$$\lambda_2 = 2, \text{ m.a.}(\lambda_2) = 2$$

chiaramente si ha $\text{m.g.}(\lambda_1) = 1$, vediamo cosa succede per λ_2 . Scriviamo prima di tutto la matrice $A_t - \lambda_2 I$ e riduciamo con Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 2-t & 0 & t-2 \\ 2t-4 & t-2 & 2-t \\ 2-t & 0 & t-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango di $A_t - \lambda_2 I$ è 2 dunque si ha $\text{m.g.}(\lambda_2)=1$ quindi A_t non è diagonalizzabile per $t \neq 2$

Esercizio 4 (appello 3)

(a) Siano B_1 e B_2 le matrici associate alle basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice cercata è data da:

$$A = B_2 \cdot A_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} \cdot B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -10 & -2 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

(b) Detoniamo con $C_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$ la matrice associata a g rispetto alle basi $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_1$ e denotiamo con C la matrice associata a g rispetto alle basi canoniche. La prima matrice è data dalle ipotesi:

$$C_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mentre C può essere ricavata come nel quesito precedente

$$C = B_1 \cdot C_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} \cdot B_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Un altro modo per risolvere l'esercizio poteva essere quello di scrivere la matrice associata alle equazioni: $g(1, 1) = (1, 0, 0)$ e $g(1, -1) = (2, 1, 1)$ e poi ridurre con il metodo di Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

e quindi

$$C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Esercizio 5 (appello 3)

La matrice A associata ad f è data da:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Procedendo come al solito calcoliamo il polinomio caratteristico

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$$

dunque ci sono due autovalori distinti $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$. L'autovalore λ_1 ha molteplicità algebrica 2. Per sapere se f ammette una base di autovettori occorre calcolare la molteplicità geometrica di λ_1 .

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il Rango di $A - \lambda_1 I$ è 2 dunque la molteplicità geometrica di λ_1 è 1 e la funzione f non ammette una base di autovettori.