Esercizi 9
17\05\2016

David Barbato

Esercizio 1. *Data la matrice A:*

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Trovare, se esiste, una matrice $H \in GL_3$ *tale che posto* $D := H^{-1}AH$ *si abbia* D *matrice diagonale.*

Esercizio 2. *Diagonalizzare, se possibile, la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. *Discutere al variare di* $t \in \mathbb{R}$ *la diagonalizzabilità della matrice* A *data da:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ t & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. *Sia* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'endomorfismo definito da:*

$$f(x, y, z) = (y - z, x + 2z, 2z)$$

si determini, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ *costituita da autovettori di* f*.*

Esercizio 5. *Per quali valori di* $t \in \mathbb{R}$ *la seguente matrice è diagonalizzabile?*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -t \\ 0 & t & 0 & 2t - t^2 \\ 0 & t - 2 & 2 & 2t - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzioni

Esercizio 1

$\det(A-\lambda I) = -\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$. Il polinomio caratteristico ha 3 autovalori reali distinti con molteplicità algebrica 1. Dunque la matrice A è diagonalizzabile. Siano $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -2$ i tre autovalori. Gli autospazi V_{λ_j} sono uguali al $ker(A-\lambda_j I)$. Per $j = 1$ bisogna risolvere il sistema

$$(A-\lambda_j I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

risolvendo il sistema lineare omogeneo si ottiene

$$V_{\lambda_1} = \{(t,t,t)|t \in \mathbb{R}\} = \langle(1,1,1)\rangle$$

Per $j = 2$ si ha $\lambda_j = -1$ e dunque bisogna risolvere

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

risolvendo il sistema lineare omogeneo si ottiene

$$V_{\lambda_2} = \{(t,t,0)|t \in \mathbb{R}\} = \langle(1,1,0)\rangle$$

Infine per $j = 2$ si ha $\lambda_j = -2$ e dunque bisogna risolvere

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

risolvendo il sistema lineare omogeneo si ottiene

$$V_{\lambda_3} = \{(2t,t,0)|t \in \mathbb{R}\} = \langle(2,1,0)\rangle$$

tre autovettori relativi agli autovalori λ_1, λ_2 e λ_3 sono dati da: $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,1,0)$ e $v_3 = (2,1,0)$. (la scelta degli autovettori chiaramente non è l'unica possibile.) Posto

$$B := \left(\begin{pmatrix} \\ v_1 \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ v_2 \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ v_3 \\ \\ \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si ha

$$B^{-1} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

$\det(A-\lambda I) = \lambda^2-2\lambda+1 = (\lambda-1)^2$. Il polinomio caratteristico ha un solo autovalore $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica 2. Si ricava facilmente $Rango(A-\lambda_1 I) = 1$ dunque la molteplicità geometrica di λ_1 è uguale ad 1 ed A non è diagonalizzabile poiché la molteplicità geometrica è minore della molteplicità algebrica..

Esercizio 3

$\det(A-\lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2t$. Da cui ponendo il polinomio uguale a zero si ricava:

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{1+8t}}{2}$$

Bisogna considerare separatamente i casi $1+8t > 0$, $1+8t < 0$ e $1+8t = 0$.
Se $1+8t > 0$ cioè $t > -\frac{1}{8}$ allora ci sono due autovalori distinti con molteplicità algebrica 1 e dunque A è diagonalizzabile.
Se $1+8t < 0$ cioè $t < -\frac{1}{8}$ allora ci sono due autovalori distinti complessi con molteplicità algebrica 1 e dunque A è diagonalizzabile solo su $\mathbb{C}$.
Se infine $1+8t = 0$ cioè $t = -\frac{1}{8}$ allora la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{8} & 2 \end{pmatrix}$$

con autovalore $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ la matrice $A - \lambda_1 I$ diventa:

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$Rango(A-\lambda_1 I) = 1$ e dunque poiché la molteplicità geometrica di λ_1 è uguale ad uno mentre quella algebrica è 2 allora A non è diagonalizzabile.

Esercizio 4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(A-\lambda I) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$. Il polinomio caratteristico ha tre autovalori distinti $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ $\lambda_3 = -1$ con molteplicità algebrica 1. Risolvendo il sistema

$$(A - \lambda_j I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

si ricavano tre autovettori $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$ e $v_3 = (1,-1,0)$.

Esercizio 5 $t = -1$