Prova d'esame di

Fondamenti di algebra lineare e geometria (mat.disp.)

Laurea Triennale in Ingegneria dell'energia

03/07/2017

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA..

Quesiti preliminari di teoria

Sono ammessi al più 3 errori su 12. Qualora non si diano almeno nove risposte corrette su 12 il compito verrà considerato insufficiente (e non verrà corretto il resto dell'elaborato). Il punteggio associato ai quesiti è 3 meno il numero di domande sbagliate.

Quesito 1.

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in M_{6,6}(\mathbb{R})$?

(a) Se $A \xrightarrow{S_{1,2}} B$ allora $det(B) = det(A)$.

(b) Se $A \xrightarrow{H_1(7)} B$ allora $det(B) = det(A)$.

(c) Se $A \xrightarrow{H_{1,2}(7)} B$ allora $det(B) = det(A)$.

(d) Se $A \xrightarrow{H_1(2017)} B$ allora $det(B) = 2017 \cdot det(A)$.

Quesito 2.

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni W_1, W_2 e W_3 sottospazi vettoriali di $V := \mathbb{R}^5$, con $dim(W_1) = dim(W_2) = dim(W_3) = 2$

(a) $dim(W_1 \cap W_2) + dim(W_1 \cap W_3) + dim(W_2 \cap W_3) > 0$

(b) Se $W_1 = (W_2 + W_3)^\perp$ allora $W_1 + W_2 + W_3 = V$.

(c) Se $W_1 = (W_2 + W_3)^\perp$ allora $dim(W_2 \cap W_3) = 1$.

(d) $dim((W_1 + W_2) \cap (W_2 + W_3) \leq 3$.

Quesito 3.

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in M_{4,4}(\mathbb{R})$.

(a) Se la matrice A ha un autovalore $\lambda_1 = a + bi$ con $b \neq 0$ allora tutti gli autovalori di A hanno molteplicità algebrica minore o uguale a 2.

(b) Se la matrice A ha un autovalore $\lambda_1 = a + bi$ con $b \neq 0$ allora A è una matrice simmetrica.

(c) Se la matrice A ha un autovalore λ_1 con molteplicità algebrica uguale a 4 allora A è una matrice simmetrica.

(d) Se la matrice A ha un autovalore λ_1 con molteplicità geometrica uguale a 4 allora A è una matrice simmetrica.

Esercizio 1. (V. 2 punti.)
Sia A la seguente matrice:

$$A := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

con $\theta \in \mathbb{R}$ parametro.
Per quali valori di $\theta \in \mathbb{R}$ la matrice A è una matrice ortogonale? Giustificare la risposta.

Esercizio 2. (V. 2 punti.)
Sia
$$z = \frac{(i\sqrt{3}-1)^{1000}}{(1-i)^{2017}} \cdot (1+i)$$

(i) Quanto vale $|z|$?

(ii) Determinare due numeri reali a e b tali che $z = a + bi$.

Esercizio 3. (V. 8 punti.)
Consideriamo il seguente sistema lineare con α e Γ parametri in $\mathbb{R}$ e x, y e z incognite.

$$\begin{cases} x + (2y-1)\alpha & = & \Gamma - z \\ (y-1)\alpha & = & \Gamma - z \\ (1-y)\alpha & = & x + z \end{cases}$$

(a) Per quali valori di α e Γ in $\mathbb{R}$ il sistema ha infinite soluzioni?

(b) Per quali valori di α e Γ in $\mathbb{R}$ il sistema non ha soluzione?

(c) Per i valori di α e Γ per i quali il sistema ha soluzione unica calcolare la soluzione.

(d) Per i valori di α e Γ per i quali il sistema ha infinite soluzioni calcolare lo spazio affine delle soluzioni.

Esercizio 4. (V. 5 punti.)
Consideriamo la seguente matrice A

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

e sia f l'applicazione lineare associata ad A.
(a) Quanto vale il rango di A? Calcolare il ker dell'applicazione f.
(b) Mostrare che $v_1 := (1, 1, 1, 1)$ è un autovettore. Qual è l'autovalore associato a v_1?
(c) Indicare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica e geometrica.
(d) Determinare gli autovettori di A.
(e) Trovare (se esistono) due matrici D e H con D matrice diagonale e H matrice invertibili tali che: $D = H^{-1}AH$.

Esercizio 5. (V. 3 punti.)
Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ un sottoinsieme di R^4 con:

$$v_1 = (\tfrac{4}{7}, -\tfrac{5}{7}, -\tfrac{2}{7}, \tfrac{2}{7})$$

$$v_2 = (\tfrac{1}{7}, \tfrac{4}{7}, -\tfrac{4}{7}, \tfrac{4}{7})$$

$$v_3 = (\tfrac{4}{7}, \tfrac{2}{7}, \tfrac{5}{7}, \tfrac{2}{7})$$

.

(a) Determinare (se esiste) un vettore v_4 tale che $\mathcal{B}$ sia una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 6. (V. 10 punti.)
In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ consideriamo i punti $A := (1, 0, 1)$, $B := (0, -1, 1)$, $C := (0, 1, 0)$ e $D := (1, 2, 0)$.
Sia r la retta passante per A e B.
Sia s la retta passante per B e C.
Sia π_1 il piano passante per A, B e C.
Sia π_2 il piano passante per D e ortogonale ad r.

(a) Determinare un punto $P_1 \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ e un vettore $v_1 \in \mathbb{R}^3$ tali che $r = P_1 + \langle v_1 \rangle$.

(b) Determinare un sistema di equazioni minimale per la retta s.

(c) Determinare un punto $P_2 \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ e due vettori $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ tali che $\pi_1 = P_2 + \langle w_1, w_2 \rangle$.

(d) Determinare un'equazione cartesiana per π_2. (Determinare $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che $\pi_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) | ax + by + cz = d\}$).

(e) Calcolare la distanza tra il punto D e la retta r.