Prova in itinere di

Fondamenti di algebra lineare e geometria (mat.disp.)

Laurea Triennale in Ingegneria dell'energia

08/03/2017

Candidato: **BARATELLA FABIO**

N.Matricola: **1137595**

Posto a sedere: **A 5**

Esercizio 1.

Assegnata la matrice A

$$A := \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare gli autovalori della matrice A.
(b) Calcolare gli autovettori della matrice A.
(c) Calcolare due basi per gli autospazi V_{λ_1} e V_{λ_2} della matrice A.
(d) Calcolare le matrici B_{λ_1} e B_{λ_2} associate alla proiezione ortogonale sugli autospazi V_{λ_1} e V_{λ_2}.
(e) Verificare che il prodotto $B_{\lambda_1} B_{\lambda_2}$ dia la matrice nulla.

a) $(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} 7-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 6-\lambda \end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = (7-\lambda)\left[(3-\lambda)(6-\lambda)-4\right]$$
$$= (7-\lambda)\left[18-3\lambda-6\lambda+\lambda^2-4\right]$$
$$= (7-\lambda)\left[\lambda^2-9\lambda+14\right]$$
$$= (7-\lambda)(\lambda-7)(\lambda-2)$$

Polinomio caratteristico $= -(\lambda-7)^2(\lambda-2)$

$\boxed{\lambda_1 = 7}$

$\boxed{\lambda_2 = 2}$

La matrice è diagonalizzabile in quanto simmetrica

b) $\lambda_1 = 7$ $\quad (A-\lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{GJ} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \{ 2y-z=0 \ ; \ z=2y$

$S_{\lambda_1} = \{(x, y, 2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$S_{\lambda_1} = \langle (1\,0\,0)(0\,1\,2) \rangle$

Autovettori $\boxed{v_1 = (1,0,0)}$ $\boxed{v_2 = (0,1,2)}$

$\lambda_2 = 2 \qquad (A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{GJ} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} ; \quad y = -2z$

$S_{\lambda_2} = \{(0, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

Autovettore $\boxed{V_3 = (0, -2, 1)}$

$S_{\lambda_2} = \langle (0, -2, 1) \rangle$

c) Autospazio V_{λ_1} (base) $BV_{\lambda_1} = \boxed{\{(1 0 0), (0 1 2)\}}$

Autospazio V_{λ_2} (base) $BV_{\lambda_2} = \boxed{\{(0, -2, 1)\}}$

d) Per calcolare le matrici associate alla proiezione ortogonale devo avere basi ortonormali

$\boxed{\text{Calcolo } B_{\lambda_1}}$

Base $V_{\lambda_1} = \{(1 0 0)(0 1 2)\}$ $\qquad \begin{cases} V_1 = (1 0 0) \\ V_2 = (0 1 2) \end{cases}$

$u_1 = \dfrac{V_1}{\|V_1\|} = (1, 0, 0)$

$\tilde{u}_2 = V_2 - (V_2 \cdot u_1) u_1 = V_2 \qquad \{(V_2 \cdot u_1) = (0 1 2) \cdot (1 0 0) = 0$

$\tilde{u}_2 = (0 1 2)$

$u_2 = \dfrac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|} = \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$B_{\lambda_1} = (u_1)\, u_1 + (u_2)\, u_2$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1 0 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \left(0 \ \dfrac{1}{\sqrt{5}} \ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 2/5 & 4/5 \end{pmatrix} =$

$= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 2/5 & 4/5 \end{pmatrix}}$

$\boxed{\text{Calcolo } B_{\lambda_2}}$

Base $V_{\lambda_2} = \{(0, -2, 1)\}$ $\qquad \{V_1 = (0, -2, 1)$

Base ortonormale: $u_1 = \dfrac{V_1}{\|V_1\|} = \left(0, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$B_{\lambda_2} = (u_1)\, u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \left(0 \ -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -2/5 \\ 0 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}}$

e) Verifico che $B_{\lambda_1} \cdot B_{\lambda_2}$ dia matrice nulla

$$B_{\lambda_1} \cdot B_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 2/5 & 4/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -2/5 \\ 0 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Esercizio 6. (V. 12 punti.)
In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ siano $P_1 := (1,0,4)$, $P_2 := (0,2,0)$ punti. $T_1 := \langle(1,1,2)\rangle$ e $T_2 := \langle(1,-1,-1)\rangle$ siano sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Siano $W_1 := T_1^\perp$ e $W_2 := T_2^\perp$. Siano π_1 ed π_2 i piani passanti rispettivamente per P_1 e P_2 ortogonali rispettivamente a T_1 e T_2. E infine siano r_1 e r_2 le rette ortogonali rispettivamente a π_1 e π_2 e passanti rispettivamente per i punti P_1 e P_2.
(a) Trovare una base per W_1 e una per W_2.
(b) Mostrare che i piani π_1 e π_2 non sono paralleli.
(c) Trovare un'equazione per i piani π_1 e π_2.
(d) Trovare delle equazioni parametriche per i piani π_1 e π_2.
(e) Determinare dei vettori v_1 e v_2 tali che $r_1 = P_1 + \langle v_1\rangle$ e $r_2 = P_2 + \langle v_2\rangle$.
(f) Trovare delle equazioni parametriche per le rette r_1 e r_2.
(g) Calcolare la distanza tra le rette r_1 e r_2.

$\pi_1 = P_1 + W_1$ $\qquad$ $r_1 = P_1 + T_1$
$\pi_2 = P_2 + W_2$ $\qquad$ $r_2 = P_2 + T_2$

a) Sistema lineare di $W_1 = \{ x+y+2z=0$

$W_1 = \{(-y-2z, y, z) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$

$W_1 = \langle(-1,1,0)(-2,0,1)\rangle$

Base $W_1 = \boxed{\{(-1\,1\,0)(-2\,0\,1)\}}$

Sistema lineare di $W_2 = \{ x-y-z=0$

$W_2 = \{(y+z, y, z) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$

$W_2 = \langle(1\,1\,0)(1\,0\,1)\rangle$

Base $W_2 = \boxed{\{(1\,1\,0)(1\,0\,1)\}}$

b) $\pi_1 = (1,0,4) + \langle(-1,1,0)(-2,0,1)\rangle$ $\qquad$ $\pi_2 = (0\,2\,0) + \langle(1\,1\,0)(1\,0\,1)\rangle$

Affinché π_1 sia $/\!/$ a π_2, π_1 deve avere la stessa giacitura di π_2

$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{GJ} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$

$W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{GJ} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

La forma GJ delle basi che generano W_1 non è uguale alla forma di GJ delle basi che generano W_2 $\Rightarrow$ π_1 non è parallelo a π_2

c) Eq π_1 $\{ x+y+2z=a$

P_1 passante $\rightarrow$ $\{ 1+8=a$; $a=9$

Eq π_1 : $\boxed{x+y+2z=9}$

Eq π_2 $\{ x-y-z=a$

P_2 passante $\rightarrow$ $\{ 0-2+0=a$; $a=-2$

Eq π_2 : $\boxed{x-y-z=-2}$

d) $\pi_1: (104) + t_1(-110) + t_2(-201)$

$$\boxed{\pi_1 \begin{cases} x = 1 - t_1 - 2t_2 \\ y = t_1 \\ z = 4 + t_2 \end{cases}}$$

$\pi_2: (020) + t_1(110) + t_2(101)$

$$\boxed{\pi_2 \begin{cases} x = t_1 + t_2 \\ y = 2 + t_1 \\ z = t_2 \end{cases}}$$

e) $r_1 = P_1 + T_1$

$r_1 = P_1 + \langle v_1 \rangle$

$\boxed{v_1 = (1, 1, 2)}$

$r_2 = P_2 + T_2$

$r_2 = P_2 + \langle v_2 \rangle$

$\boxed{v_2 = (1, -1, -1)}$

f) $r_1 = (104) + \langle (112) \rangle$

$$\boxed{r_1 \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 4 + 2t \end{cases}}$$

$r_2 = (020) + \langle (1 -1 -1) \rangle$

$$\boxed{r_2 = \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = -t \end{cases}}$$

g) $\text{dist}(r_1 - r_2) = \text{dist}(Q_1 - Q_2)$

$Q_1 \in r_1$, $Q_1 = (1+x, x, 4+2x)$ $\qquad$ $Q_2 \in r_2$, $Q_2 = (y, 2-y, -y)$

$v = (Q_1 - Q_2) = (1 + x - y, x - 2 + y, 4 + 2x + y)$

Impongo che v sia ortogonale a v_1 e v_2 (rispettivamente ortogonale alla giacitura della retta r_1 e r_2

$$\begin{cases} v \cdot v_1 = 0 \\ v \cdot v_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 + x \cancel{-y} + x - 2 \cancel{+y} + 8 + 4x + 2y = 0 \\ 1 + \cancel{x} - y \cancel{-x} + 2 - y - 4 - 2x - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x + 2y + 7 = 0 \\ -3y - 2x - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -3x - \frac{7}{2} \\ 2x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$2x - 9x - \frac{21}{2} + 1 = 0; \quad -7x - \frac{19}{2} = 0; \quad \begin{cases} x = -\frac{19}{14} \\ y = \frac{4}{7} \end{cases}$$

$$Q_1 = \left(-\frac{5}{14}, -\frac{19}{14}, \frac{9}{7}\right) \quad ; \quad Q_2 = \left(\frac{4}{7}; \frac{10}{7}, -\frac{4}{7}\right)$$

$$\text{dist}(r_1 - r_2) = \text{dist}(Q_1 - Q_2) = \|(Q_1 - Q_2)\| = \left\|\left(-\frac{13}{14}, -\frac{39}{14}, \frac{13}{7}\right)\right\|$$

$$= \sqrt{\frac{169 + 9(169) + 4(169)}{196}} = \boxed{\sqrt{14} \cdot \frac{13}{14}}$$