

Esercizi 10

29\05\2017

David Barbato

Breve riepilogo di teoria

Consideriamo il sistema lineare:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \dots & \dots \\ a_{k,1}x_1 + \dots + a_{k,n}x_n = b_k \end{cases}$$

se il sistema ammette soluzione allora l'insieme delle soluzioni S è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$. $S = P + T$ con $P \in \mathbb{R}^n$ e $T \leq \mathbb{R}^n$. La decomposizione di S non è unica ma vale la seguente proposizione:

Proposizione 1. *Se $S_1 = P_1 + T_1$ e $S_2 = P_2 + T_2$ sono due sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$ allora vale la seguente relazione:*

$$S_1 = S_2 \quad \Longleftrightarrow \quad T_1 = T_2 \text{ e } P_2 - P_1 \in T_i$$

Sistemi lineari omogenei. Consideriamo ora un sottospazio vettoriale $T \leq \mathbb{R}^n$ ed il suo ortogonale $W = T^\perp$. Siano $v_1, \dots, v_k$ e $w_1, \dots, w_h$ vettori di $\mathbb{R}^n$ e sia $x = (x_1, \dots, x_h)$, allora valgono le seguenti relazioni:

$$T = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \quad \Longleftrightarrow \quad W \text{ è lo spazio soluzione di } \begin{cases} v_1 \cdot x = 0 \\ \dots \\ v_k \cdot x = 0 \end{cases}$$

$$W = \langle w_1, \dots, w_h \rangle \quad \Longleftrightarrow \quad T \text{ è lo spazio soluzione di } \begin{cases} w_1 \cdot x = 0 \\ \dots \\ w_h \cdot x = 0 \end{cases}$$

inoltre se i vettori $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti e $T = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ allora $v_1, \dots, v_k$

è una base di T e il sistema $\begin{cases} v_1 \cdot x = 0 \\ \dots \\ v_k \cdot x = 0 \end{cases}$ è minimale tra i sistemi lineari che ammettono W

come spazio delle soluzioni, (minimale nel senso che ha il numero minimo di equazioni). Lo stesso si può dire se $w_1, \dots, w_h$ sono linearmente indipendenti ...

Sistemi lineari non omogenei. Siano $v_1, \dots, v_k$ vettori di $\mathbb{R}^n$, sia $b \in \mathbb{R}^k$ e sia $x = (x_1, \dots, x_h)$, consideriamo il sistema lineare non omogeneo seguente:

$$\begin{cases} v_1 \cdot x = b_1 \\ \dots \\ v_k \cdot x = b_k \end{cases} \quad (1)$$

se il sistema (1) ammette soluzione allora l'insieme delle soluzioni S è dato da un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$, $S = P + T$ con $P \in \mathbb{R}^n$ e $T \leq \mathbb{R}^n$. Dove P è una qualunque soluzione del sistema (1) mentre T è lo spazio soluzione del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} v_1 \cdot x = 0 \\ \dots \\ v_k \cdot x = 0 \end{cases}$$

vale ancora

$$W = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \iff W = T^\perp.$$

Esercizio 1. *Dato il sistema:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

sia T lo spazio delle soluzioni e sia $W := T^\perp$. Determinare una base per T , una base per W , un sistema lineare minimale che abbia T come spazio delle soluzioni e un sistema lineare minimale che abbia W come insieme delle soluzioni.

Esercizio 2. *Consideriamo il seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 2 \\ x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 3 \end{cases}$$

determinare se ammette soluzione. Determinare l'insieme S delle soluzioni ed un sistema minimale di equazioni lineari che ammette S come spazio affine delle soluzioni.

Esercizio 3. *Sia T_t al variare di $t \in \mathbb{R}$ lo spazio delle soluzioni del seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} x + ty + z = 0 \\ x - ty - z = 0 \\ x + y + tz = 0 \end{cases}$$

sia $W_t := T_t^\perp$ determinare una base di W_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. Risolvere il seguente sistema in $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y^3 + z = 1 \\ x + 2z = 0 \\ x + y^3 - z = 3 \end{cases}$$

Esercizio 5. Consideriamo il seguente sistema nelle incognite $M \in \mathbb{R}$, $\theta_1, \theta_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

$$\begin{cases} M + (t^2 - 1) \tan(\theta_1) + t(\tan(\theta_2) - 1) + |t| = 0 \\ (1 - t^2) \tan(\theta_1) - t \tan(\theta_2) - |t| = 0 \\ M - t \tan(\theta_2) - |t|(1 + \tan(\theta_2)) = 0 \end{cases}$$

stabilire al variare di t in $\mathbb{R}$ se ammette una, zero o infinite soluzioni.

Esercizio 6. In $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ sia r la retta di equazione cartesiana $3x + 4y = 5$. Trovare delle equazioni parametriche per r .

Esercizio 7. In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ sia r la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Trovare delle equazioni parametriche per r .

Soluzioni

Esercizio 1 La matrice associata al sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

tramite operazioni elementari di riga applicando la riduzione di Gauss Jordan possiamo ridurci a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

siano $w_1 = (1, 0, -1, -1)$ e $w_2 = (0, 1, 1, 0)$ allora $\mathcal{B}_W := (w_1, w_2)$ è una base di W . Mentre T è lo spazio delle soluzioni del sistema minimale:

$$\begin{cases} w_1 \cdot x = 0 \\ w_2 \cdot x = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Dall'ultimo sistema possiamo ricavare $\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$ quindi

$$T = \{(x_3 + x_4, -x_3, x_3, x_4) | x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

$T = \langle (1, -1, 1, 0), (1, 0, 0, 1) \rangle$ posto $v_1 = (1, -1, 1, 0)$ e $v_2 = (1, 0, 0, 1)$ allora $\mathcal{B}_T := (v_1, v_2)$ è una base di T . Mentre W è lo spazio delle soluzioni del sistema minimale:

$$\begin{cases} v_1 \cdot x = 0 \\ v_2 \cdot x = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Per indicare che W è lo spazio delle soluzioni del sistema (2) avremmo potuto anche scrivere: $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^n | x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_4 = 0\}$.

Esercizio 2 La matrice associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

tramite operazioni elementari di riga applicando la riduzione di Gauss Jordan possiamo ridurci a:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

poiché non ci sono pivot sulla colonna dei termini noti allora il sistema ammette soluzione. Il sistema seguente

$$\begin{cases} x_1 - 2x_5 = -1 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 3 \\ x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

è un sistema lineare minimale che ammette S come spazio delle soluzioni. Ci sono 3 pivot: x_1 , x_2 e x_4 . Mentre le variabili libere sono 2 x_3 e x_5 . Dunque

$$\begin{cases} x_1 = 2x_5 - 1 \\ x_2 = -x_3 - x_5 + 3 \\ x_4 = -2x_5 + 1 \end{cases}$$

$$S = \{(2x_5 - 1, -x_3 - x_5 + 3, x_3, -2x_5 + 1, x_5) | x_3, x_5 \in \mathbb{R}\}$$

$$S = (-1, 3, 0, 1, 0) + \langle (0, -1, 1, 0, 0), (2, -1, 0, -2, 1) \rangle$$

Esercizio 3 Il sistema lineare dell'esercizio può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} w_1 \cdot (x, y, z) = 0 \\ w_2 \cdot (x, y, z) = 0 \\ w_3 \cdot (x, y, z) = 0 \end{cases}$$

con $w_1 = (1, t, 1)$, $w_2 = (1, -t, -1)$, $w_3 = (1, 1, t)$. Dunque $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ per trovare una base bisogna trovare dei generatori indipendenti, (i vettori w_1, w_2, w_3 potrebbero essere o non essere indipendenti in funzione di t).

La matrice associata ai vettori è

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & -t & -1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

tramite operazioni elementari di riga possiamo ricondurci alla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1-t^2 \end{pmatrix}$$

ci sono almeno due pivot, mentre per il terzo bisogna capire se $1-t^2 = 0$ oppure $1-t^2 \neq 0$.

CASO $t = -1$. Se $t = -1$ allora $\mathcal{B}_{W_t} = ((1, 0, 0), (0, 1, -1))$ è una base di W_t

CASO $t = 1$. Se $t = 1$ allora $\mathcal{B}_{W_t} = ((1, 0, 0), (0, 1, 1))$ è una base di W_t

CASO $t \notin \{-1, 1\}$. Se $t \notin \{-1, 1\}$ allora W_t ha dimensione 3 dunque $W = \mathbb{R}^3$ e una base è data da: $\mathcal{B}_{W_t} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$

Esercizio 4

Il sistema lineare in x, y, z non è lineare ma può diventare lineare ponendo $x_1 = x$, $x_2 = y^3$ e $x_3 = z$ (quindi $y = \sqrt[3]{x_2}$), da cui si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

risolvendo si ottiene $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$, dunque $x = 2$, $y = 0$ e $z = -1$

Esercizio 5

Ponendo $x_1 = M$, $x_2 = \tan(\theta_1)$ e $x_3 = \tan(\theta_2)$ si ottiene un sistema lineare dalla cui risoluzione si ricava:

Per $t \in \{(-\infty, 0) \cup \{1\}\}$ nessuna soluzione.

Per $t = 0$ infinite soluzioni: $M = 0$, $\theta_1 = 0$, $\forall \theta_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Per $t \in \{(0, 1) \cup (1, \infty)\}$ soluzione unica: $M = t$, $\theta_1 = \arctan(\frac{t}{1-t^2})$, $\theta_2 = 0$

Esercizio 6 La soluzione non è unica delle possibili soluzioni sono le seguenti:

$$r : \begin{cases} x = -\frac{4}{3}t + \frac{5}{3} \\ y = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (3)$$

oppure

$$r : \begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = -3t - 1 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

svolgimento: occorre risolvere l'equazione $3x + 4y = 5$ risolvendo nella solita maniera si ottiene $x = -\frac{4}{3}y + \frac{5}{3}$ e dunque

$$r = \left\{ \left(-\frac{4}{3}y + \frac{5}{3}, y \right) \middle| y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(-\frac{4}{3}t + \frac{5}{3}, t \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

da cui si ottengono le equazioni parametriche (3).

Esercizio 7 Riduciamo con l'algoritmo di Gauss-Jordan la matrice associata al sistema,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - z = 3 \\ y + z = -1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = z + 3 \\ y = -z - 1 \end{cases}$$

$$r = \{(z + 3, -z - 1, z) | z \in \mathbb{R}\} = \{(t + 3, -t - 1, t) | t \in \mathbb{R}\}$$

dunque

$$\begin{cases} x = t + 3 \\ y = -t - 1 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$