Esercizi 12
05\06\2017
Esercizi numero 6 degli appelli 2014-2015 e 2015-2016

David Barbato

Appello 1 2014-2015

Esercizio 6.
In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ siano r ed s le seguenti rette:
$r = (1, 1, 0) + \langle(0, 0, 1)\rangle$
$s = (-1, 0, 1) + \langle(0, 1, 1)\rangle$
Calcolare la distanza tra le due rette ed i punti di minima distanza Q_1 e Q_2.

Appello 2 2014-2015

Esercizio 6.
In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ siano π_1 ed π_2 i seguenti piani:
$\pi_1 = P_1 + T_1$ con $P_1 = (1, 0, 1)$ e $T_1 = \langle(0, 1, -1), (1, -1, 0)\rangle$;
$\pi_2 = P_2 + T_2$ con $P_2 = (1, 1, 0)$ e $T_2 = \langle(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle$.
Siano inoltre $r = \pi_1 \cap \pi_2$, $W_1 = T_1^{\perp}$ e $W_2 = T_2^{\perp}$.
(a) Mostrare che i piani π_1 e π_2 non sono paralleli.
(b) Trovare una base per W_1 e una per W_2.
(c) Determinare delle costanti a, b, c e a', b', c' tali che: T_1 è lo spazio delle soluzioni di $ax+by+cz = 0$ e T_2 è lo spazio delle soluzioni di $a'x+b'y+c'z = 0$.
(d) Determinare le equazioni cartesiane per π_1 e π_2.
(e) Determinare (se esistono) un punto $P \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ ed un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $r = P + \langle v\rangle$.
(f) Determinare il fascio di piani Φ che ha come luogo fisso la retta r.
(g) Sia $P_3 = (1, 1, 1) \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Determinare, se esiste, un piano π_3 del fascio Φ passante per P_3.

Appello 3 2014-2015

Esercizio 6.
Siano P_1 e P_2 due punti di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, sia v un vettore di $\mathbb{R}^3$, sia $T := \langle v \rangle$ e $W := T^{\perp}$. Consideriamo inoltre in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ la retta $r = P_1 + \langle v \rangle$ e il piano $\pi = P_2 + W$ sia infine P_3 il punto di intersezione tra il piano π e la retta r.
Assumiamo che P_1, P_2 e v siano dati:

$$P_1 = (2, -3, -1) \qquad P_2 = (5, -3, 5) \qquad v = (-1, 2, 2)$$

(a) Determinare un sistema lineare minimale per W.
(b) Trovare una base per W.
(c) Determinare un sistema lineare minimale per T.
(d) Determinare un'equazione per il piano π.
(e) Determinare un sistema lineare di equazioni minimali per la retta r.
(f) Calcolare le coordinate del punto P_3.
(g) Calcolare la distanza tra il punto P_2 e la retta r.
(h) Calcolare la distanza tra il punto P_1 e il piano π.

Appello 4 2014-2015

Esercizio 6.
In $\mathbb{R}^3$ consideriamo i sottospazi vettoriali $W_1 = \langle (1, 1, 0) \rangle$ e $T_2 = \langle (1, 0, -1), (1, -1, 1) \rangle$, siano inoltre $T_1 := W_1^{\perp}$ e $W_2 := T_2^{\perp}$. In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ siano assegnati i punti $P_1 = (0, -3, 2)$ e $P_2 = (0, 1, 0)$ siano infine $r := P_1 + W_1$ e $\pi := P_2 + T_2$.

(a) Trovare una base per T_1.

(b) Trovare una base per W_2.

(c) Gli spazi T_1 e T_2 sono diversi?

(d) Determinare un sistema lineare minimale per T_1

(e) Determinare un sistema lineare minimale per W_2

(f) Determinare un'equazione cartesiana per π

(g) Determinare due equazioni cartesiane per r

(h) Determinare (se esistono) i punti di intersezione tra r e π.

Appello 1 2015-2016

Esercizio 6.
In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ siano $P_1 := (0,2,4)$, $P_2 := (0,-1,1)$ punti. $T_1 := \langle(1,0,1)\rangle$ e $T_2 := \langle(1,2,0)\rangle$ siano sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Siano $W_1 := T_1^\perp$ e $W_2 := T_2^\perp$. Siano π_1 ed π_2 i piani passanti rispettivamente per P_1 e P_2 ortogonali rispettivamente a T_1 e T_2. E infine siano r_1 e r_2 le rette ortogonali rispettivamente a π_1 e π_2 e passanti rispettivamente per i punti P_1 e P_2.
(a) Mostrare che i piani π_1 e π_2 non sono paralleli.
(b) Trovare un'equazione per i piani π_1 e π_2.
(c) Trovare delle equazioni parametriche per i piani π_1 e π_2.
(d) Trovare una base per W_1 e una per W_2.
(e) Determinare dei vettori v_1 e v_2 tali che $r_1 = P_1 + \langle v_1\rangle$ e $r_2 = P_2 + \langle v_2\rangle$.
(f) Calcolare la distanza tra le rete r_1 e r_2.

Appello 2 2015-2016

Esercizio 6.
In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ sia π il piano descritto dalle equazioni parametriche:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + t_1 \\ y = t_1 - t_2 \\ z = -1 + t_2 \end{cases} \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Sia T la giacitura del piano π, sia $W := T^\perp$, sia $P_2 := (1,2,0)$, sia r la retta passante per P_2 e ortogonale a π e infine sia P_3 il punto di intersezione tra la retta r e il piano π.

(a) Determinare un punto $P_1 \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ e due vettori $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ tali che $\pi = P_1 + \langle v_1, v_2\rangle$.

(b) Trovare una base per T.

(c) Determinare un sistema lineare minimale per W.

(d) Trovare una base per W.

(e) Determinare un sistema lineare minimale per T.

(f) Determinare un'equazione cartesiana per π. (Determinare $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) | ax + by + cz = d\}$)

(g) Determinare un sistema lineare minimale per r.

(h) Determinare le coordiante del punto P_3.

(i) Calcolare la distanza tra il punto P_2 e il piano π.

Appello 3 2015-2016

Esercizio 6.
In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ sia π il piano descritto dall'equazioni $x+y+z=3$. Sia T la giacitura del piano π e sia $W := T^{\perp}$. Sia r_1 la retta passante per i punti $A = (1,2,3)$ e $B = (1,0,-1)$. Sia r_2 la retta passante per il punto A e ortogonale a π. Sia P_1 il punto di intersezione tra r_1 e π. Sia infine P_2 il punto di intersezione tra r_2 e π.

(a) Determinare un sistema lineare minimale per T.

(b) Trovare una base per W.

(c) Trovare una base per T.

(d) Determinare un sistema lineare minimale per W.

(e) Determinare un punto $P \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ e un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $r_1 = P + \langle v, \rangle$.

(f) Determinare le coordiante del punto P_1.

(g) Determinare le coordiante del punto P_2.

(h) Calcolare la distanza tra il punto A e il piano π.

Appello 4 2015-2016

Esercizio 6.
In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ siano r_1 e r_2 due rette. Siano Q_1 e Q_2 i punti rispettivamente di r_1 e r_2 che realizzano la minima distanza tra le due rette. Assumiamo infine che le rette r_1 e r_2 siano definite nel seguente modo:

$$r_1 := (0,0,1) + \langle (1,1,1) \rangle$$

$$r_2 : \begin{cases} x + y = 4 + z \\ x + y = 4 - z \end{cases}$$

(a) Determinare un punto $P_2 \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ e un vettore $v_2 \in \mathbb{R}^3$ tali che $r_2 = P_2 + \langle v_2 \rangle$.

(b) Determinare un sistema lineare minimale per r_1.

(c) Determinare le coordinate dei punto Q_1 e Q_2.

(d) Calcolare la distanza tra le rette r_1 e r_2.

Soluzioni

Esercizio 6 (appello 2 2014-2015)
(a) I due piani sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura, applicando Gauss-Jordan ai generatori di T_1 e T_2 otteniamo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Gauss-Jordan} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Gauss-Jordan} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque T_1 e T_2 non sono uguali e quindi π_1 e π_2 non sono paralleli.
(b) Possiamo ottenere un sistema di equazioni per W_1 e W_2 utilizzando i generatori di T_1 e T_2. La cosa più conveniente è di utilizzare le basi ottenute con Gauss-Jordan al punto (a) in modo da avere il sistema già a scalini. I sistemi ottenuti sono

$$\begin{cases} x - z & = 0 \\ y - z & = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$$

dai quali otteniamo:

$$W_1 = \{(z, z, z) | z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 1) \rangle$$

$$W_2 = \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 0, 1) \rangle$$

quindi

$$\mathcal{B}_{W_1} = \{(1, 1, 1)\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{B}_{W_2} = \{(0, 0, 1)\}$$

(c) Questa parte è simile a quanto fatto nell'esercizio 3 dello stesso appello.
Per T_1 si ha $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ e quindi $x + y + z = 0$.
Per T_2 si ha $(a', b', c') = (0, 0, 1)$ e quindi $z = 0$.
(d) Le equazioni per π_1 e π_2 sono del tipo $x + y + z = d$ e $z = d'$. Poiché sappiamo che P_1 e P_2 devo appartenere rispettivamente ai piani π_1 e π_2 allora per calcolare d e d' basta sostituire le coordinate di P_1 nella prima equazione e quelle di P_2 nella seconda equazione. Sostituendo otteniamo:

$$x + y + z = 2 \qquad \text{e} \qquad z = 0$$

(e) Poiché r è l'intersezione dei due piani, per trovare r basta risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x + y + z & = 2 \\ z & = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene:

$$r = \{(-y+2, y, 0)|y \in \mathbb{R}\} = (2,0,0) + \langle(-1,1,0)\rangle$$

(f) Il fascio di piani Φ è ottenuto ponendo uguali a zero le combinazioni lineari delle due equazioni di r: $x+y+z-2=0$ e $z=0$.

$\alpha \cdot (x+y+z-2) + \beta \cdot z = 0$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli.

(g) Basta sostituire le coordinate del punto P_3 nel fascio di rette ottenuto al punto (f) e ricavare dei valori di α e β che soddisfano l'equazione ottenuta. (Attenzione i valori di α e β non possono essere entrambi nulli e non sono unici)

$$\alpha \cdot (1+1+1-2) + \beta \cdot 1 = 0 \iff \alpha + \beta = 0$$

Per esempio scegliendo $\alpha = 1$ e $\beta = -1$ si ottiene il piano di equazione:

$$x + y - 2 = 0\ .$$

Esercizio 6 (appello 3 2014-2015)

$\mathcal{B}_T = \{(-1,2,2)\}$

(a) $W: \quad -x+2y+2z=0$

(b) Da (a) si ricava $x = 2y+2z$ e dunque $W = \{(2y+2z, y, z)|y, z \in \mathbb{R}\}$.

$\mathcal{B}_W = \{(2,1,0),(2,0,1)\}$

(c) $T: \quad \begin{cases} 2x+y=0 \\ 2x+z=0 \end{cases}$

(d) $\pi: \quad -x+2y+2z=-1$

(e) $r: \quad \begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x+z=3 \end{cases}$

(f) risolvendo il sistema $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x+z=3 \\ -x+2y+2z=-1 \end{cases}$ si ottiene $P_3 = (1,-1,1)$

(g) $\|P_2 - P_3\| = 6$

(h) $\|P_1 - P_3\| = 3$

Esercizio 6 (appello 2 2015-2016)

`Tutti i quesiti ad eccezione dei quesiti (h) ed (i) hanno più` `risposte che possono essere ugualmente corrette, quelle che seguono sono delle possibili soluzioni.`

(a) $\pi = (1, 0, -1) + \langle(1, 1, 0), (0, -1, 1)\rangle$

(b) $\mathcal{B}_T = \{(1, 1, 0), (0, -1, 1)\}$

(c)

$$W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{array}{l} x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{array} \right\}$$

(d) $\mathcal{B}_W = \{(1, -1, -1)\}$

(e)

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \; x - y - z = 0 \; \right\}$$

(f)

$$\pi = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{A}^3 \middle| \; x - y - z = 2 \; \right\}$$

(g)

$$r = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{A}^3 \middle| \begin{array}{l} x + y = 3 \\ -y + z = -2 \end{array} \right\}$$

(h) $P_3 = (2, 1, -1)$ (g) $dist(\pi, P_2) = \sqrt{3}$

Esercizio 6 (appello 3 2015-2016)

(a) $x + y + z = 0$

(b) $\mathcal{B}_W = \{(1, 1, 1)\}$

(c) $\mathcal{B}_T = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$

(d) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

(e) $r_1 = (1, 2, 3) + \langle(0, 2, 4)\rangle$

(f) $P_1 = (1, 1, 1)$

(g) $P_2 = (0, 1, 2)$

(h) $dist(A, \pi) = \sqrt{3}$