Esercizi 1
06\03\2017
Numeri complessi e polinomi

David Barbato

Esercizio 1. *Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi:*
(a) $z = (1+i)(1-2i)$
(b) $z = \frac{13}{3+2i}$
(c) $z = \frac{26}{3i-2}$
(d) $z = \frac{2+i}{3-2i}$
(e) $z = \frac{1+i}{(1-3i)(i-3)}$

Esercizio 2. *Determinare modulo ed argomento dei seguenti numeri complessi:*
(a) $z = 3+3i$
(b) $z = 2i - 2\sqrt{3}$
(c) $z = -3 - 3\sqrt{3}i$
(d) $z = 1 - i$

Esercizio 3. *Determinare la forma algebrica dei seguenti numeri complessi a partire dal modulo e dall'argomento:*
(a) $|z| = 1, \quad Arg(z) = \frac{\pi}{6}$
(b) $|z| = 2\sqrt{2}, \ Arg(z) = \frac{3}{4}\pi$
(c) $|z| = 3, \quad Arg(z) = 0$
(d) $|z| = 4, \ Arg(z) = \frac{3}{2}\pi$
(e) $|z| = 5\sqrt{3}, \ Arg(z) = \frac{5}{3}\pi$
(f) $|z| = 1, \ Arg(z) = \frac{15}{2}\pi$
(g) $|z| = 2, \ Arg(z) = 11\pi$

Indichiamo ora con 'arctan' la funzione arcotangente, funzione inversa della funzione tangente nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$.

Esercizio 4. *Determinarne modulo e argomento dei seguenti numeri. Determinare l'argomento tramite la funzione arcotangente. (Per esempio* $Arg(11+7i) = \arctan(\frac{7}{11})$*,* $Arg(-11-7i) = \arctan(\frac{7}{11}) + \pi$*)*
(a) $z = 4+3i$
(b) $z = 5 - 12i$
(c) $z = 6i - 8$
(d) $z = -15 - 8i$

Esercizio 5. *Risolvere le seguenti equazioni.* (`Utilizzare la sostituzione` $z = a + bi$ `con` a `e` b `reali.`)
(a) $z^2 = 4i - 3$
(b) $z^2 = 16 - 30i$
(c) $z^2 = 8 - 6i$

Esercizio 6. *Trovare le soluzioni dei seguenti sistemi.*
(a) $\begin{cases} 5\frac{z}{\overline{z}} = 4z - 5 \\ z - \overline{z} = 2i \end{cases}$
(b) $\begin{cases} z + \overline{z} = 2i \\ z - \overline{z} = 0 \end{cases}$

Esercizio 7.
(a) *Dimostrare che:* $\cos(2015\pi) + i\sin(2015\pi) = -1$
(b) *Sia* $z = \cos(\frac{\pi}{8}) + i\sin(\frac{\pi}{8})$ *calcolare* z^{2015}
(c) *Sia* $z = \cos(\frac{3}{4}\pi) + i\sin(\frac{3}{4}\pi)$ *calcolare* $\Big((z^7)^7\Big)^7$
(d) *Sia* $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ *calcolare* z^{19}
(e) *Sia* $z = 3i - 3$ *calcolare* $\frac{z^7}{729}$
(f) *Sia* $z = \cos(\frac{1}{2}\pi) + i\sin(2\pi)$ *calcolare* z^{2015}

Esercizio 8.
(a) *Determinare le soluzioni di* $z^5 = 32i$
(b) *Determinare le soluzioni di* $z^3 = 1$
(c) *Determinare le soluzioni di* $z^3 = 16 + 88i$ *sapendo che una delle tre radici è* $4 + 2i$. `Utilizzare il risultato del quesito (b)`
(d) *Determinare la soluzione di* $z^{12} = 1$ *con parte immaginaria massima.*

Esercizio 9. *Calcolare le radici dei seguenti polinomi.* `Utilizzare eventualmente i risultati dell'esercizio 5`
(a) $p(z) = z^2 + (1 - 2i)z - 2i$
(b) $p(z) = z^2 - 4(1 + i)z + 8i - 1$

Esercizio 10. *Trovare le radici e decomporre in fattori di primo grado i seguenti polinomi.*
(a) $p(z) = z^5 - z$
(b) $p(z) = z^4 - 3z^2 - 4$
(c) $p(z) = z^5 + z^4 - (4 + 2\sqrt{3}i)z^3 - (4 + 2\sqrt{3}i)z^2 + (4 + 4\sqrt{3}i)z + 4 + 4\sqrt{3}i$

Esercizio 11 (Appello 1A 2014-2015 ese 2).
Trovare le radici (in $\mathbb{C}$) e decomporre in fattori di primo grado il seguente polinomio:

$$p(z) = z^{2015} + 5z^{2013} - 36z^{2011}$$

Esercizio 12 (Appello 1B 2014-2015 ese 2).
Trovare le radici (in $\mathbb{C}$) e decomporre in fattori di primo grado il seguente polinomio:

$$p(z) = z^{2015} - (2-i)z^{2014} + (3-i)z^{2013}$$

Esercizio 13 (Appello 1C 2014-2015 ese 2).
Trovare le radici (in $\mathbb{C}$) e decomporre in fattori di primo grado i seguenti polinomi:

(a) $p(z) = z^3 - 1$

(b) $p(z) = z^3 - i$

Esercizio 14 (Appello 1D 2014-2015 ese 2).
Sia $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, *calcolare* z^{2015}

Esercizio 15 (Appello 2A 2014-2015 ese 2).
Trovare le radici (in $\mathbb{C}$) e decomporre in fattori di primo grado i seguenti polinomi:

(a) $p(z) = z^4 - 1$

(b) $p(z) = z^4 + \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

Esercizio 16 (Appello 2B 2014-2015 ese 2).
Trovare le radici (in $\mathbb{C}$) e decomporre in fattori di primo grado il seguente polinomio:

$$p(z) = z^{12} + z^8 - z^4 - 1$$

Esercizio 17 (Appello 2C 2014-2015 ese 2).
Sia $z = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$, *trovare* $a, b \in \mathbb{R}$ *tali che* $a + bi = z^{2015}$.

Esercizio 18 (Appello 2D 2014-2015 ese 2).
Trovare le radici (in $\mathbb{C}$) e decomporre in fattori di primo grado i seguenti polinomi:

(a) $p(z) = z^4 - 1$

(b) $p(z) = z^4 + \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

Esercizio 19 (Appello 3A 2014-2015 ese 2).
Determinare le radici di $z^4 + 7 - 24i = 0$ *sapendo che una delle radici è* $z_1 = 2 + i$

Esercizio 20 (Appello 3B 2014-2015 ese 2).
Determinare le radici di $z^4 + 7 + 24i = 0$ *sapendo che una delle radici è* $z_1 = 2 - i$

Esercizio 21 (Appello 4 2014-2015 ese 2).
Trovare le radici (in $\mathbb{C}$*) e decomporre in fattori il seguente polinomio:*

$$p(z) = 2z^{2016} + 16z^{2014} - 2016z^{2012}$$

Esercizio 22 (Compitino 1A 2015-2016 ese 1). *Trovare le soluzioni (in* $\mathbb{C}$*) dell'equazione:*

$$z^2 = 6i - 8$$

(Esprimere i risulati in forma algebrica $a+bi$ *con* a *e* b *reali.)*

Esercizio 23 (Compitino 1A 2015-2016 ese 2). *Trovare le radici (in* $\mathbb{C}$*) del polinomio:*

$$p(z) = z^2 - (3 + i)z + 4$$

(Esprimere i risulati in forma algebrica $a+bi$ *con* a *e* b *reali.)*

Esercizio 24 (Compitino 1B 2015-2016 ese 1). *Trovare le radici (in* $\mathbb{C}$*) e decomporre in fattori di primo grado il seguente polinomio:*

$$p(z) = z^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}$$

Esercizio 25 (Compitino 1B 2015-2016 ese 2). *Esprimere* z *in forma algebrica (*$z = a + bi$ *con* a *e* b *in* $\mathbb{R}$*)*

$$z = \frac{(i + 1)^{16}}{(i - \sqrt{3})^4} \cdot 2^{-3}$$

Esercizio 26 (Appello 1 2015-2016 ese 2). *Sia* $z = \frac{(i-1)^{2016}}{2^{1000}}$.
Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ *tali che* $z = a + bi$.

Esercizio 27 (Appello 2 2015-2016 ese 2). *Trovare le radici e decomporre in fattori di primo grado il seguente polinomio:*

$$p(z) = z^8 - 2z^6 - z^4 + 2z^2$$

Esercizio 28 (Appello 3 2015-2016 ese 2). *Trovare le radici e decomporre in fattori di primo grado i seguenti polinomi:*

$$p_1(z) = z^3 - 2$$

$$p_2(z) = 2z^6 - 3z^3 - 2$$

Esercizio 29 (Appello 4 2015-2016 ese 2). *Trovare le radici e decomporre in fattori di primo grado il seguente polinomio:*

$$p(z) = z^{2017} - 5z^{2015} - 36z^{2013}$$

Soluzioni

Esercizio 1 a) $3-i$ b) $3-2i$ c) $-4-6i$ d) $\frac{4}{13}+\frac{7}{13}i$ e) $\frac{1}{10}-\frac{1}{10}i$

Esercizio 2 a) $|z|=3\sqrt{2}$, $arg(z)=\frac{\pi}{4}$. b) $|z|=4$, $arg(z)=\frac{5}{6}\pi$. c) $|z|=6$, $arg(z)=\frac{4}{3}\pi$. d) $|z|=\sqrt{2}$, $arg(z)=\frac{7}{4}\pi$.

Esercizio 3 a) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$. b) $z=-2+2i$. c) $z=3$. d) $-4i$. e) $z=\frac{5\sqrt{3}}{2}-\frac{15}{2}i$. f) $z=-i$. g) $z=-2$.

Esercizio 4 a) $|z|=5$, $arg(z)=\arctan(\frac{3}{4})$. b) $|z|=13$, $arg(z)=\arctan(-\frac{12}{5})$. c) $|z|=10$, $arg(z)=\arctan(-\frac{3}{4})+\pi$. d) $|z|=17$, $arg(z)=\arctan(\frac{8}{15})+\pi$.

Esercizio 5 a) $z_1=1+2i$, $z_2=-1-2i$. b) $z_1=5-3i$, $z_2=3i-5$. c) $z_1=3-i$, $z_2=i-3$.

Esercizio 6 a) $z_1=2+i$, $z_2=\frac{1}{2}+i$. b) Nessuna soluzione.

Esercizio 7
a) $2015\pi=2\pi\cdot 1007+\pi$ dunque $\cos(2015\pi)+i\sin(2015\pi)=\cos(\pi)+i\sin(\pi)=-1$.
b) $z^{2015}=\cos(\frac{2015}{8}\pi)+i\sin(\frac{2015}{8}\pi)$ infine poichè $\frac{2015}{8}\pi=2\pi\cdot 125+\frac{15}{8}\pi$ allora si ha: $z^{2015}=\cos(\frac{15}{8}\pi)+i\sin(\frac{15}{8}\pi)$.
c) $\left((z^7)^7\right)^7=z^{343}=\left(e^{\frac{3}{4}\pi i}\right)^{343}=e^{\frac{1029}{4}\pi i}=e^{2\pi i\cdot 128+\frac{5}{4}\pi i}=e^{\frac{5}{4}\pi i}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i.$
d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$
e) $-24-24i$
f) 0

Esercizio 8
a) In forma esponenziale si ha $z=\rho e^{\theta i}$ e dunque $z^5=\rho^5e^{5\theta i}$ mentre vale $32i=2^5e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i}$ per ogni $k\in\mathbb{Z}$. Dunque $\rho=2$ e $5\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ovvero

$$\theta=\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{5}=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5} \qquad \text{e} \qquad z=2e^{(\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5})i}$$

Per la periodicità dell'esponenziale complesso ci sono 5 soluzioni distinte che si possono ottenere con le sostituzioni $k=0,1,2,3,4$. Da cui si ottiene:
$z_1=2e^{\frac{1}{10}\pi i}$,
$z_2=2e^{\frac{5}{10}\pi i}=2e^{\frac{\pi}{2}i}=2i$,
$z_3=2e^{\frac{9}{10}\pi i}$,
$z_4=2e^{\frac{13}{10}\pi i}$,
$z_5=2e^{\frac{17}{10}\pi i}$,

b) $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
c) $z_1 = 4 + 2i$, $z_2 = -(2 + \sqrt{3}) + (2\sqrt{3} - 1)i$, $z_3 = \sqrt{3} - 2 - (2\sqrt{3} + 1)i$
d) i

Esercizio 9
a) $z_1 = 2i$, $z_2 = -1$, b) $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 1 + 2i$

Esercizio 10
a) $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = i$, $z_4 = -1$, $z_5 = -i$, $p(z) = z(z-1)(z-i)(z+1)(z+i)$
b) ponendo $y = x^2$ si ottiene $y_1 = 4$ e $y_2 = -1$ da cui si ricava $p(z) = (z^2 - 4)(z^2 + 1) = (z - 2)(z + 2)(z - i)(z + 1)$, mentre le soluzioni sono: $z_1 = 2$, $z_2 = -2$, $z_3 = i$, $z_4 = -i$,
c) E' chiaro che la disposizione dei coefficienti a due a due uguale permette di raccogliere un fattore $z + 1$ dunque

$$p(z) = (z + 1)(z^4 - (4 + 2\sqrt{3}i)z^2 + 4 + 4\sqrt{3}i$$

Con la sostituzione $y = z^2$ si ricava $y_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$ e $y_2 = 2$ dunque

$$p(z) = (z+1)(z^2-(2+2\sqrt{3}i))(z^2-2) = (z+1)(z^2-(2+2\sqrt{3}i))(z-\sqrt{2})(z+\sqrt{2})$$

resta da decomporre il fattore $z^2 - (2 + 2\sqrt{3}i)$ ovvero bisogna risolvere l'equazione $z^2 = (2 + 2\sqrt{3}i)$. Calcolandone il modulo si ottiene $|2 + 2\sqrt{3}i| = 4$ quindi mettendo in evidenza il modulo l'equazione diventa $z^2 = 4(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$ a questo punto diventa evidente che $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})$ quindi

$$z^2 = \rho^2 e^{2\theta i} = 2^2 e^{(\frac{\pi}{3}+2k\pi)i}$$

da cui si ricava $\rho = 2$ e $2\theta = (\frac{\pi}{3} + 2k\pi)$ dunque le due soluzioni sono $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{6}i} = \sqrt{3} + i$ e $z_2 = 2e^{\frac{7}{6}\pi i} = -\sqrt{3} - i$.

$$p(z) = (z + 1)(z - (\sqrt{3} + i))(z + \sqrt{3} + i)(z - \sqrt{2})(z + \sqrt{2})$$

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

Esercizio 15
(a) Le radici sono ± 1 e $\pm i$. la decomposizione è $p(z) = (z - 1)(z + 1)(z -$

$i)(z+1)$
(b) Occorre risolvere:

$$Z^4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \ . \tag{1}$$

Osserviamo che $\left|-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$ e in particolare vale $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{2}{3}\pi i}$ quindi le soluzini di (1) avranno la forma $z = e^{\theta i}$ con

$$e^{4\theta i} = e^{\frac{2}{3}\pi i}$$

quindi

$$4\theta = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \qquad\qquad k \in \mathbb{Z}$$

da cui ricaviamo le 4 soluzioni $\theta_1 = \frac{1}{6}\pi$, $\theta_2 = \frac{4}{6}\pi$, $\theta_3 = \frac{7}{6}\pi$ e $\theta_4 = \frac{10}{6}\pi$. Quindi le radici sono:

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

e vale

$$p(z) = \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

Esercizio 16

$$p(z) = z^8(z^4+1) - (z^4+1) = (z^8-1)(z^4+1) = (z^4-1)(z^4+1)^2$$

le radici di $z^4 - 1 = 0$ sono ∓ 1 e $\mp i$. Per trovare le radici di $z^4 + 1 = 0$ bisogna risolvere $z^4 = -1$, ponendo $z = e^{\theta i}$ si ha: $e^{4\theta i} = e^{\pi i}$ da cui si racava rapidamente $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, $\theta_2 = \frac{3\pi}{4}$, $\theta_3 = \frac{5\pi}{4}$, $\theta_4 = \frac{7\pi}{4}$, quindi

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \quad z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i) \quad z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

$$p(z) = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)\left(z - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\left(z + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\left(z + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\left(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Esercizio 17
Prima di tutto osserviamo che vale $|\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)| = 1$ e $z = e^{\frac{\pi}{3}i}$.

$$z^{2015} = e^{\frac{2015}{3}\pi i} =$$

poiché vale $\frac{2015}{3} = 741 + \frac{2}{3}$ allora si ha

$$z^{2015} = e^{(741+\frac{2}{3})\pi i} = e^{740\pi i + \pi i + \frac{2}{3}\pi i} = e^{740\pi i} \cdot e^{\pi i} \cdot e^{\frac{2}{3}\pi i}$$

infine poiché

$$e^{740\pi i} = 1 \qquad e^{\pi i} = -1 \qquad e^{\frac{2}{3}\pi i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

allora si può concludere:

$$z^{2015} = 1 \cdot (-1) \cdot (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3} i)$$

Esercizio 18
(a) Le radici sono ± 1 e $\pm i$. la decomposizione è $p(z) = (z-1)(z+1)(z-i)(z+1)$
(b) Analogamente a quanto visto nell'esercizo 16 le radici sono:

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \quad z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$$

e vale

$$p(z) = \left(z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i\right)\left(z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right)$$

Esercizio 19 Determinare le radici di $z^4 + 7 - 24i = 0$ sapendo che una delle radici è $z_1 = 2 + i$
Soluzione
Bisogno risolvere l'equazione

$$z^4 = -7 + 24i$$

sapendo che $z_1 = 2 + i$ è una soluzione ovvero sappiamo che $z_1^4 = -7 + 24i$. Sappiamo che le radici quarte dell'unità sono $\{1, -1, i, -1\}$ cioè vale $1^4 = (-1)^4 = i^4 = (-i)^4 = 1$. Dunque

$$(1 \cdot z_1)^4 = (-1 \cdot z_1)^4 = (i \cdot z_1)^4 = (-i \cdot z_1)^4 = -7 + 24i$$

quindi le soluzione dell'equazione $z^4 = -7 + 24i$ sono:
$z_1 = 1 \cdot (2 + i) = 2 + i$
$z_2 = -1 \cdot (2 + i) = -2 - i$
$z_3 = i \cdot (2 + i) = -1 + 2i$
$z_4 = -i \cdot (2 + i) = 1 - 2i$