

Esercizi 2

20\03\2017

David Barbato

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi in x . Consideriamo i seguenti insieme di polinomi:

$$U_1 := \{ax + b | a, b \in \mathbb{R}\} \quad U_2 := \{ax^3 + b | a, b \in \mathbb{R}\}$$

- (a) Dimostrare che U_1 e U_2 sono sottospazi vettoriali di V .
- (b) Descrivere il sottospazio vettoriale $W = U_1 \cap U_2$.
- (c) Descrivere il sottospazio vettoriale $T = U_1 + U_2$.
- (d) Mostrare che l'insieme $S = U_1 \cup U_2$ non è un sottospazio vettoriale di V .

Esercizio 2. Siano $v_1, \dots, v_n$ vettori di uno spazio vettoriale V , sia λ uno scalare. Siano inoltre $u_1, \dots, u_n$, i vettori definiti come segue:

$$u_1 := v_1 \quad \dots \quad u_{n-1} := v_{n-1} \quad u_n := \lambda v_1 + v_n$$

Posto $S := \{v_1, \dots, v_n\}$ e $T := \{u_1, \dots, u_n\}$ dimostrare che

$$\langle S \rangle = \langle T \rangle .$$

Esercizio 3. Siano $v_1, \dots, v_n$ vettori non nulli di un $\mathbb{R}$ spazio vettoriale V , sia λ uno scalare diverso da zero. Siano inoltre $u_1, \dots, u_n$, i vettori definiti come segue:

$$u_1 := v_1 \quad \dots \quad u_{n-1} := v_{n-1} \quad u_n := \lambda v_n$$

Posto $S := \{v_1, \dots, v_n\}$ e $T := \{u_1, \dots, u_n\}$ dimostrare che

$$\langle S \rangle = \langle T \rangle .$$

A cosa è servita l'ipotesi λ diverso da zero?

Esercizio 4. Quali dei seguenti sottoinsieme dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi vettoriali? (Per ciascun insieme dimostrare che è un sottospazio vettoriale oppure mostrare con un esempio che non lo è.)

- (a) $A = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a + b = 2c\}$
- (b) $B = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}, |a + b| = 2\}$
- (c) $C = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = c\}$
- (d) $D = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}, ab = c\}$
- (e) $E = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = c^2\}$
- (f) $F = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a = 0, b^2 = 0, c^3 = 0\}$
- (g) $G = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}, (a^2 + b^2)^2 = a^2 + b^2, |a| + |b| < 1\}$

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{R}^3$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con le usuali operazioni. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ sia $S_t := \{(0, t, 0), (1, 0, t), (0, t, 1)\}$. Per quali valori di t in $\mathbb{R}$ si ha:

$$\langle S_t \rangle = V$$

Esercizio 6. Sia $V = \mathbb{R}^3$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con le usuali operazioni. Sia $S := \{(0, 1, 0), (2, 1, 1), (1, 0, 1), (0, -2, 0), (3, 3, 3)\}$. Determinare tutti i sottoinsiemi T di S composti da tre elementi tali che:

$$\langle T \rangle = V$$

Esercizio 7. Sia $V = \mathbb{C}^2$ spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ con le usuali operazioni. Sia $S := \{(1, 1), (2, i), (1, 0), (-2i, 0), (0, 0)\}$. Dimostrare che $\langle S \rangle = V$. Determinare tutti i sottoinsiemi T di S composti da 2 elementi tali che:

$$\langle T \rangle = V$$

Soluzioni

Esercizio 1

a) Dimosteremo che U_1 è un sottospazio vettoriale di V . La dimostrazione per U_2 è analoga.

Affinché U_1 sia un sottospazio vettoriale di V devono essere soddisfatte le seguenti tre condizioni:

1. 0_V appartiene a U_1
2. U_1 è chiuso rispetto alla somma
3. U_1 è chiuso rispetto al prodotto per scalare

vale

$$U_1 := \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

- 1) Scegliendo $a = b = 0$ si ottiene $ax + b = 0$ appartiene a U_1 .
- 2) Siano v_1 e v_2 vettori di U_1 allora per la definizione precedente esistono a_1, b_1, a_2, b_2 tali che

$$v_1 = a_1x + b_1 \quad v_2 = a_2x + b_2$$

posto $v_3 := v_1 + v_2$, $a_3 = a_1 + a_2$ e $b_3 = b_1 + b_2$ allora vale $v_3 = (a_1 + a_2)x + b_1 + b_2 = a_3x + b_3$ quindi anche v_3 appartiene a U_1 .

- 3) Siano $v \in U_1$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Poiché $v \in U_1$ allora esistono a e B tali che $v = a_1x + b_1$ se poniamo $u := \lambda \cdot v$, $a_2 := \lambda a_1$ e $b_2 := \lambda b_1$ allora si ha $u = a_2x + b_2$ quindi anche $u := \lambda \cdot v$ appartiene a U_1 .

b) $W = \{a \mid a \in \mathbb{R}\}$

c) $W = \{ax^3 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

d) I polinomi $v_1 = x$ e $v_2 = x^3$ appartengono rispettivamente a U_1 e U_2 quindi appartengono entrambi a $U_1 \cup U_2$ ma la loro somma $v_3 = v_1 + v_2 = x^3 + x$ non appartiene né ad U_1 né a U_2 quindi non appartiene a $U_1 \cup U_2$.

Esercizio 2

Per la proprietà transitiva della combinazione lineare basterà mostrare che gli elementi di S sono combinazione lineare degli elementi di T e viceversa. Che gli elementi di T siano combinazioni lineari degli elementi di S segue immediatamente dalla definizione dei vettori u_i :

$$u_1 = v_1 \quad \dots \quad u_{n-1} = v_{n-1} \quad u_n = \lambda v_1 + v_n$$

Per quanto riguarda i vettori v_i è sufficiente calcolare l'ultimo $v_n = u_n - \lambda v_1 = u_n - \lambda u_1$ quindi si ha

$$v_1 = u_1 \quad \dots \quad v_{n-1} = u_{n-1} \quad v_n := u_n - \lambda u_1$$

Esercizio 4

- a) Sì. Per dimostrare $A \leq V$ occorre verificare che $0_V \in A$ e che A è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalare.
b) No perché 0_V non appartiene a B .
c) No perché $(1, 0, 1)$ appartiene a C ma $2 \cdot (1, 0, 1) = (2, 0, 2)$ non appartiene a C .
d) No perché $(1, 1, 1)$ appartiene a D ma $2 \cdot (1, 1, 1) = (2, 2, 2)$ non appartiene a D .
e) No perché $(1, 0, 1)$ e $(-1, 0, 1)$ appartengono a E ma $(1, 0, 1) + (-1, 0, 1) = (0, 0, 2)$ non appartiene a E .
f) Sì perché l'unico elemento di F è l'elemento neutro: $F = \{0_V\}$.
g) Si può dimostrare che vale $G := \{(0, 0, c) | c \in \mathbb{R}\}$ e G è chiaramente uno spazio vettoriale.

Esercizio 5

Occorre provare a risolvere l'equazione:

$$(a, b, c) = \alpha \cdot (0, t, 0) + \beta \cdot (1, 0, t) + \gamma \cdot (0, t, 1) \quad (1)$$

è necessario capire se per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ esistono $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ che rendano vera l'uguaglianza 1? Proviamo a risolvere l'equazione 1.

$$\begin{aligned} (a, b, c) &= (0, \alpha t, 0) + (\beta, 0, \beta t) + (0, \gamma t, \gamma) \\ (a, b, c) &= (\beta, \alpha t + \gamma t, \beta t + \gamma) \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{cases} a = \beta \\ b = \alpha t + \gamma t \\ c = \beta t + \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = a \\ \alpha t = b - ct + at^2 \\ \gamma = c - at \end{cases}$$

I casi $t = 0$ e $t \neq 0$ vanno analizzati separatamente. Per $t = 0$ si ha: $S_0 = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ e chiaramente $(0, 1, 0) \notin \langle S_0 \rangle$ dunque

$$\langle S_0 \rangle \neq V$$

Se invece $t \neq 0$ allora nella seconda equazione del sistema possiamo dividere per t e otteniamo

$$\begin{cases} \beta = a \\ \alpha = \frac{b - ct + at^2}{t} \\ \gamma = c - at \end{cases}$$

dunque

$$\forall t \neq 0 \quad \langle S_t \rangle = V$$

Esercizio 6

Ci sono 5 diversi sottoinsieme di T composti da 3 vettori che generano V :

$$\begin{aligned} &\{(0, 1, 0), (2, 1, 1), (1, 0, 1)\} \\ &\{(0, 1, 0), (2, 1, 1), (3, 3, 3)\} \\ &\{(2, 1, 1), (1, 0, 1), (0, -2, 0)\} \\ &\{(2, 1, 1), (1, 0, 1), (3, 3, 3)\} \\ &\{(2, 1, 1), (0, -2, 0), (3, 3, 3)\} \end{aligned}$$

Esercizio 7

Per dimostrare che S genera V è sufficiente mostrare che tutti gli elementi di V possono essere ottenuti come combinazione lineare degli elementi di S . Sia (z_1, z_2) un generico elemento di V per esempio vale $(z_1, z_2) = z_2 \cdot (1, 1) + (z_1 - z_2)(1, 0)$ dunque S genera V .

I sottoinsiemi di S di due elementi che generano V sono:

$$\begin{aligned} &\{(1, 1), (2, i)\} \\ &\{(1, 1), (1, 0)\} \\ &\{(1, 1), (-2i, 0)\} \\ &\{(2, i), (1, 0)\} \\ &\{(2, i), (-2i, 0)\} \end{aligned}$$

Dimostreremo solo i casi $\langle \{(2, i), (1, 0)\} \rangle = V$ e $\langle \{(1, 0), (-2i, 0)\} \rangle \neq V$. Cominciamo con la dimostrazione $\langle \{(2, i), (1, 0)\} \rangle = V$. Sarà sufficiente mostrare che ogni vettore di V può essere scritto come combinazione lineare dei vettori $\{(2, i), (1, 0)\}$. Sia (z_1, z_2) un generico elemento di V allora vale

$$(z_1, z_2) = \frac{z_2}{i}(2, i) + \left(z_1 - 2\frac{z_2}{i}\right)(1, 0) .$$

Per mostrare invece che $\langle \{(1, 0), (-2i, 0)\} \rangle \neq V$ sarà sufficiente mostrare un elemento di V che non è combinazione lineare dei vettori $\{(1, 0), (-2i, 0)\}$. È chiaro che il vettore $(0, 1)$ non può essere ottenuto come combinazione lineare dei vettori $\{(1, 0), (-2i, 0)\}$.