Esercizi 3
di riepilogo

David Barbato

Esercizio 1. *Ridurre in forma di Gauss Jordan le seguenti matrici.*

$$(a)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (b)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(c)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ a^2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (d)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ 0 & 1-a & -a & -a^2 \\ 1 & -1 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$(e)\quad \begin{pmatrix} 1+\pi & 0 & \pi+\pi^2 & 1 \\ \pi & 1 & 0 & 0 \\ \pi & 0 & \pi^2 & 1 \\ \pi & 2 & -\pi^2 & -1 \end{pmatrix} \qquad (f)\quad \begin{pmatrix} a & a^2 & 1 & a^2 \\ 1 & a & -1 & 2a+a^2 \\ 1 & a & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. *Quali dei seguenti sottoinsieme dello spazio vettoriale* $\mathbb{R}^4$ *sono basi?*

(a) $A = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$
(b) $B = \{(1,1,-1,2),(-1,1,1,1),(1,2,1,2),(1,-1,7,1),(1,-1,-7,1)\}$
(c) $C = \{(1,2,3,4),(2,3,4,5),(3,4,5,6),(4,5,6,7)\}$
(d) $D = \{(1,0,1,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$
(e) $E = \{(1,2,3,4),(-1,-2,-3,-4),(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$

Esercizio 3. *Per quali valori del paramentro reale* t*, l'insieme* $A := \{(t,2,0),(0,t+1,1),(-t^3,2t,2)\}$ *è una base dello spazio vettoriale* $\mathbb{R}^3$*?*

Esercizio 4. *Sia* $S := \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ *la base canonica di* $\mathbb{R}^4$. *A partire da ciascuno dei seguenti insiemi di vettori linearmente indipendenti, costruire una base utilizzando i vettori di* S. *(Per esempio nel quesito (a) occorre trovare una base che contenga* A *e sia contenuta in* $A \cup S$*).*
(a) $A = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0)\}$
(b) $B = \{(1,0,1,0)\}$
(c) $C = \{(1,0,1,1),(1,2,3,4),(0,1,2,3)\}$
(d) $D = \{(1,0,1,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$
(e) $E = \{\}$

Esercizio 5. *Estrarre (se possibile) da ciascuno dei seguenti insiemi una base di* $\mathbb{R}^3$. *(Per esempio nel quesito (a) occorre trovare tre vettori di* A *che formano una base).*
(a) $A = \{(1,0,0),(1,1,0),(3,1,0),(1,2,3)\}$
(b) $B = \{(1,-1,0),(-1,0,1),(3,1,-4),(1,1,-2),(1,1,1)\}$
(c) $C = \{(1,-1,0),(-1,0,1),(-1,1,0),(1,-2,1)\}$
(d) $D = \{(1,-1,0),(-1,0,1),(1,0,0)\}$
(e) $E = \{(1,0,0),(-1,0,1)\}$

Soluzioni Esercizio 1

(a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
(d)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(e)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \pi & 0 \\ 0 & 1 & -\pi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(f)
$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 1 & -a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Per quanto visto a lezione $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 4 e A ne è la base canonica.
a) Si.
b) Non è una base perché è costituita da 5 elementi.
c) L'insieme C non è una base perché i suoi elementi non sono linearmente indipendenti, per esempio vale $v_2 - v_1 = v_4 - v_3$ oppure $v_3 = 2v_2 - v_1$.
d) Si l'insieme D è una base. Poiché sappiamo che $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 4 e D è costituito da 4 elementi per dimostrare che D è una base basterà mostrare

che i quattro vettori generano $\mathbb{R}^4$ ovvero che il rango della matrice a scalini è 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{H_{3,1}(-1) \\ H_{4,1}(-1)}]{H_{2,1}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_{2,3}} ()$$

$$\xrightarrow{S_{2,3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{4,2}(-1)]{H_{3,2}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'ultima matrice ottenuta è una matrice a scalini con 4 Pivot quindi ha rango 4, quindi lo spazio generato dai vettori dell'insieme D ha dimensione 4 e non può che essere $\mathbb{R}^4$.

e) L'insieme E chiaramente non è una base perché
$(1,2,3,4) + (-1,-2,-3,-4) = 0$

Esercizio 3
$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

Esercizio 4
a) $\mathcal{B} = A \cup \{(0,0,0,1)\}$
b) Ci sono due risposte possibili:
$\mathcal{B} = \{(1,0,1,0), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1)\}$
$\mathcal{B} = \{(1,0,1,0), (0,0,1,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1)\}$
c) Ci sono tre risposte possibili:
$\mathcal{B} = \{(1,0,1,1), (1,2,3,4), (0,1,2,3), (1,0,0,0)\}$
$\mathcal{B} = \{(1,0,1,1), (1,2,3,4), (0,1,2,3), (0,0,1,0)\}$
$\mathcal{B} = \{(1,0,1,1), (1,2,3,4), (0,1,2,3), (0,0,0,1)\}$
mentre $\mathcal{B} = \{(1,0,1,1), (1,2,3,4), (0,1,2,3), (0,1,0,0)\}$ non è una base!
d) D è già una base senza bisogno di aggiungere ulteriori vettori.
e) $\mathcal{B} = S$

Esercizio 5
a) Ci sono tre risposte possibili
$\mathcal{B} = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,2,3)\}$
$\mathcal{B} = \{(1,0,0), (3,1,0), (1,2,3)\}$
$\mathcal{B} = \{(1,1,0), (3,1,0), (1,2,3)\}$
b) Va bene qualunque combinazione di tre vettori purché contenga il vettore $(1,1,1)$.

c) Non è possibile estrarre una base dall'insieme C poiché l'insieme C non genera $\mathbb{R}^3$. Per dimostrare che C non genera $\mathbb{R}^3$ è sufficiente scrivere la matrice associata ai vettori di C e calcolarne il rango,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Gauss} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice ridutta a scalini ha due pivot, quindi ha rango due e lo spazio generato da C ha dimensione 2 e non può essere $\mathbb{R}^3$.

d) D è già una base di $\mathbb{R}^3$ infatti applicando il metodo di riduzione di Gauss si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Gauss} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Due soli vettori non possono essere sufficienti per generare $\mathbb{R}^3$.