Esercizi 3

27\03\2017

David Barbato

Riduzione a Gradini

Denotiamo le 3 operazioni elementari sulle righe nel seguente modo:

- $S_{i,j}$ Scambio della riga i con la riga j
- $H_i(\alpha)$ Moltiplicazione della riga i per $\alpha \neq 0$
- $H_{i,j}(\alpha)$ Somma alla riga i della riga j moltiplicata per α

Definizione 1. Una matrice si dice ridotta in forma di **Gauss-Jordan** se è ridotta a scalini, ciascun pivot è uguale ad 1 ed è l'unico elemento non nullo della propria colonna.

La matrice di Gauss Jordan è unica nel senso che vale la seguente proposizione:

Proposizione 1. *Date due matrici A e B allora le righe di A e di B generano lo stesso sottospazio vettoriale se e solo se le matrici A e B hanno la stessa riduzione di Gauss Jordan.*

Esercizio 1. *Effettuare la riduzione di Gauss delle seguenti matrici:*

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. *Ridurre in forma di Gauss-Jordan le seguenti matrici. (Utilizzare solo le operazioni elementari di riga.)*

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$(c) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Individuare una base dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^n$. (Utilizzare il metodo di riduzione di Gauss)

(a) $W := \langle (2, 3, 1), (1, -6, -2), (-1, 3, 1) \rangle$

(b) $W := \langle (1, 0, -1, 1), (0, 1, -2, -1), (4, 3, -2, -1) \rangle$

(c) $W := \langle (1, 1, k^2 + k, k), (k, -1, 0, 0), (1, 0, k, 1), (0, k, k^3, k) \rangle$

Esercizio 4. Dire se i seguenti sottospazi W e U di $\mathbb{R}^n$ sono uguali: (Utilizzare la proposizione 1.). Calcolare la dimensione ed una base di W e U .

(a) $W := \langle (2, 3, 1), (1, -6, -2), (-1, 3, 1) \rangle$

$U := \langle (1, 21, 7), (-1, -6, -2), (7, 0, 0) \rangle$

(b) $W := \langle (1, -2, 1, 0), (0, 1, 0, -1), (3, 4, -2, -5), (1, 1, 1, -3) \rangle$

$U := \langle (1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, 0), (1, -1, 0, 0) \rangle$

(c) $W := \langle (1, 2, 3, 4), (-1, -2, -3, -4) \rangle$

$U := \langle (2, 3, 4, 5), (-2, -3, -4, -5) \rangle$

(d) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i sottospazi W e U sono uguali? Calcolarne base e dimensione.

$W := \langle (k, 1, k + 1, k), (k + 1, -1, k, -k), (k, -1, k - 1, -k), (1, 0, 1, 0) \rangle$

$U := \langle (k + 1, 1, 1 + k^2 + k^3, |k|), (1, 0, k^2, 0), (1, 1, 1 + k^2, |k|) \rangle$

(e) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i sottospazi W e U sono uguali? Calcolarne base e dimensione.

$W := \langle (1, k, -k, 0), (1, k, 0, 1) \rangle$

$U := \langle (k + 1, k^2 + k, 0, k + 1), (1, k, |k|, 2), (k, k^2, 0, k) \rangle$

Soluzioni

Esercizio 1

Occorre ridurre a scalini le seguenti matrici utilizzando le solo operazioni elementari di riga.

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{2,1}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_{1,2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{3,1}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{H_{3,2}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{3,1}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{3,2}(\frac{2}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

(a) La soluzione è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

Uno svolgimento possibile è il seguente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{2,1}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{H_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{1,2}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

(b) Soluzione

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Uno svolgimento possibile:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{2,1}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{3,1}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{3,2}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3

(a) Costruiamo la matrice che ha per righe i vettori generatori ed applichiamo il metodo di riduzione di Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{1,3}(-1)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\begin{matrix} H_{3,1}(1) \\ H_{2,1}(-1) \end{matrix}]{\begin{matrix} H_{3,1}(1) \\ H_{2,1}(-1) \end{matrix}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{2,3}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_{2,3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 3, 1))$ è una possibile base di W .

(b) Una possibile base è data da: $\mathcal{B} = ((1, 0, -1, 1), (0, 1, -2, -1), (0, 0, 8, -2))$

(c) Una possibile base è data da: $\mathcal{B} = ((1, 0, k, 1), (0, 1, k^2, k-1), (0, 0, 0, 1))$

Esercizio 4

(a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 21 & 7 \\ -1 & -6 & -2 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque per la proposizione 1 si ha $W = U$. Inoltre $\dim(U) = 2$ ed una base è data da: $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, \frac{1}{3})\}$

(b) $U = W$. $\dim(U) = 3$. Una base è data da: $\mathcal{B}_W = \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}$

(c) $U \neq W$. $\dim(W) = 1$. $\mathcal{B}_W = \{(1, 2, 3, 4)\}$. $\dim(U) = 1$. $\mathcal{B}_U = \{(1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2})\}$.

(d)

$$\begin{pmatrix} k & 1 & k+1 & k \\ k+1 & -1 & k & -k \\ k & -1 & k-1 & -k \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1+k^2+k^3 & |k| \\ 1 & 0 & k^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1+k & |k| \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & k^2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & |k| \end{pmatrix}$$

Le due matrici sono uguali se e solo se:

$$\begin{cases} k^2 = 1 \\ k = |k| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \pm 1 \\ k \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = 1$$

Dunque $W = U$ se e solo se $k = 1$. Inoltre $\dim(W) = 2$ ed una base è data da: $\mathcal{B}_W = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, k)\}$. $\dim(U) = 2$ ed $\mathcal{B}_U = \{(1, 0, k^2, 0), (0, 1, 1, |k|)\}$.

(e) Analizziamo prima W .

$$\begin{pmatrix} 1 & k & -k & 0 \\ 1 & k & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k & 1 \end{pmatrix}$$

bisogna considerare due casi se $k = 0$ allora sostituendo abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & k & -k & 0 \\ 1 & k & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se $k \neq 0$ invece

$$\begin{pmatrix} 1 & k & -k & 0 \\ 1 & k & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$$

Consideriamo lo spazio U

$$\begin{pmatrix} k+1 & k^2+k & 0 & k+1 \\ 1 & k & |k| & 2 \\ k & k^2 & 0 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & |k| & 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo prima il caso $k = 0$ sostituendo si ha:

$$\begin{pmatrix} k+1 & k^2+k & 0 & k+1 \\ 1 & k & |k| & 2 \\ k & k^2 & 0 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi per $k = 0$ le due matrici sono uguali. Consideriamo ora il caso $k \neq 0$

$$\begin{pmatrix} k+1 & k^2+k & 0 & k+1 \\ 1 & k & |k| & 2 \\ k & k^2 & 0 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{|k|} \end{pmatrix}$$

Quindi se $k = 0$ le due matrici sono uguali se $|k| = k$ cioè $k > 0$. Dunque in conclusione vale

$$U = W \quad \Leftrightarrow k \geq 0$$

Inoltre $\dim(W) = 2$ ed una base è data da: $\mathcal{B}_W = \{(1, k, 0, 1), (0, 0, k, 1)\}$.
 $\dim(U) = 2$ ed $\mathcal{B}_U = \{(1, k, 0, 1), (0, 0, |k|, 1)\}$.