Esercizi 4
03\04\2017

David Barbato

Esercizio 1. *Sono assegnati due sottospazi W_1 e W_2. Determinare la dimensione ed una base dei sottospazi $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$. Indicare inoltre se la somma è diretta. (`Sugg: può essere utile la formula di Grassmann.`)*
(a) $W_1 = \langle(1, 2, 1)\rangle$, $\quad W_2 = \langle(1, 0, 0), (0, 0, 1)\rangle$
(b) $W_1 = \langle(1, 2, 3)\rangle$, $\quad W_2 = \langle(2, 3, 4), (1, 1, 1)\rangle$
(c) $W_1 = \langle(1, 0, 1), (0, 2, 1)\rangle$, $\quad W_2 = \langle(1, 0, 0), (0, 0, 1)\rangle$

Esercizio 2. *Calcolare se possibile i seguenti prodotti tra matrici.*

(a) $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(c) $$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(d) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

(e) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(f) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

(g) $$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

(h) $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. *Calcolare se possibile l'inversa delle seguenti matrici.*

(a) $$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) $$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) $$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(d) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(e) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(f) $$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 2016 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. *Determinare la dimensione ed una base dei seguenti sottospazi di* $\mathbb{R}^3$.
(a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y = z\}$
(b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - 3y + 7z = 0\}$
(c) $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 0, y + z = 0\}$

Esercizio 5. *Sia* f *una applicazione lineare da* $\mathbb{R}^4$ *ad* $\mathbb{R}^4$*, sia* A *la matrice associata ad* f *(rispetto alle basi canoniche)*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

siano inoltre $V_1 = Ker(f)$ e $W_1 = Imm(f)$.
(a) Determinare la dimensione degli spazi vettoriali V_1 e W_1.

(b) Determinare una basi $\mathcal{B}_1$ di V_1.
(c) Determinare una base di R^4 che contenga $\mathcal{B}_1$.
(d) Determinare una base di W_1.

Soluzioni

Esercizio 1
a) $dim(W_1 \cap W_2) = 0$, $dim(W_1 + W_2) = 3$.
b) $dim(W_1) = 1$, $dim(W_2) = 2$, $dim(W_1 + W_2) = 2$, $dim(W_1 \cap W_2) = 1$.

$$dim(W_1 + W_2) = 2 \qquad \Rightarrow \qquad W_1 + W_2 = W_2$$

$$dim(W_1 + W_2) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad W_1 \cap W_2 = W_1$$

Poiché $W_1 + W_2 = W_2$ allora una base di $W_1 + W_2$ è data da una base di W_2 $\mathcal{B}_{W_1+W_2} = \{(2,3,4),(1,1,1)\}$ allo stesso modo una base di $W_1 \cap W_2$ è data da: $\mathcal{B}_{W_1 \cap W_2} = \{(1,2,3)\}$
c) $dim(W_1) = 2$, $dim(W_2) = 2$, $dim(W_1 + W_2) = 3$, $dim(W_1 \cap W_2) = 1$. Poiché $dim(W_1 + W_2) = 3$ allora $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$. Per quanto riguarda $W_1 \cap W_2$ invece vale $dim(W_1 \cap W_2) = 1$, una base di $W_1 \cap W_2$ sarà costituita da un solo elemento quindi basta trovare un elemento non nullo di $W_1 \cap W_2$ ed abbiamo finito. Notiamo che $(1,0,1)$ appartiene sia a W_1 che a W_2 dunque $\mathcal{B}_{W_1} = \{(1,0,1)\}$ è una base.

Esercizio 2

(a) $\begin{pmatrix} 6 & -9 & -3 \\ -2 & 33 & 11 \\ 0 & -18 & -6 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -8 \end{pmatrix}$

(c) le matrici non possono essere moltiplicate.

(d) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} i & h & g \\ f & e & d \\ c & b & a \end{pmatrix}$

$(f)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(g)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(g)\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$

Esercizio 3

$(a) \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$(b) \quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(c) Non é invertibile.

$(d) \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(e) Non é invertibile.

$(f) \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2016 \\ 2 & -7 & -4032 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 4

La dimensione di un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ può essere uno dei seguenti valori $\{0,1,2,3\}$.
(a) Poiché $(1,0,0)$ non appartiene ad U allora $dim(U) \neq 3$.
Poiché $(1,1,0)$ appartiene ad U allora $dim(U) \neq 0$ dunque la dimensione di U è 1 o 2. è facile notare che per esempio i vettori $v_1 = (1,1,0)$ e $v_2 = (1,0,1)$ appartengono ad U e sono indipendenti. Dunque $dim(U) = 2$ e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ è una base.
(b) Come per il punto a) $dim(W) = 2$ e per esempio una base è data da $\mathcal{B} = \{(3,2,0),(7,0,-2)\}$.
(c) Osserviamo innanzitutto che vale

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x \\ z=x \end{cases}$$

dunque si ha:

$$T = \{(x,-x,x) | x \in \mathbb{R}\}$$

quindi $T = \langle(1,-1,1)\rangle$, $dim(T) = 1$ e $\mathcal{B} = \{(1,-1,1)\}$

Esercizio 5
(a) Sappiamo dalla teoria che la dimensione di W_1 è uguale al rango della matrice A e che inoltre vale l'uguaglianza $dim(Ker(f)) + dim(Imm(f)) = dim(\mathbb{R}^4) = 4$. Applichiamo l'algoritmo di riduzione di Gauss alla matrice A per calcolare il rango.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(`Qualunque riduzione a gradini va bene per il calcolo del rango. In questo caso come in altri più avanti preferirò applicare la riduzione di Gauss-Jordan. La riduzione di Gauss-Jordan è un po' più lunga rispetto a quella di Gauss ma ha il vantaggio di essere unica e da' la possibilità di confrontare i risultati.`) La matrice ridotta a gradini ha tre pivot, dunque in A ci sono tre righe indipendenti e vale $RANK(A) = 3$. Quindi per quanto detto sopra.

$$dim(Imm(f)) = Rank(A) = 3$$

e

$$dim(Ker(f)) = 4 - dim(Imm(f)) = 1$$

(b) Sappiamo che il ker di f ha dimensione uno quindi la base è composta da un solo vettore. Occorre trovare un vettore non nullo del ker. Sia $v = (x, y, z, w)$ un generico elemento di $\mathbb{R}^4$, v appartiene al Ker se $f(v) = 0_W$ ovvero $Av = 0_W$. Sappiamo anche che le operazioni elementari di riga non modificano il ker associato ad una matrice quindi posto

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vale

$$Av = 0_W \iff Bv = 0_W$$

ovvero devo trovare x, y, z, w tali

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

svolgendo la moltiplicazione si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2z \\ y - 2z \\ w \\ 0 \end{pmatrix}$$

ponendo uguali i due membri destri delle precedenti equazioni si ottiene

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = -2z \\ y = 2z \\ w = 0 \end{cases}$$

se poniamo $z = 1$ otteniamo una soluzione $(x = -2, y = 2, z = 1, w = 0)$, il vettore $v_1 = (-2, 2, 1, 0)$ appartiene al $ker(f)$ e poiché la dimensione del ker è uno allora $\mathcal{B}_1 := \{(-2, 2, 1, 0)\}$ è una base.
(c) Per determinare una base di R^4 che contenga $\mathcal{B}_1$ è sufficiente costruire una matrice a gradini 4x4 che contenga il vettore v_1 come riga, un esempio possibile è il seguente

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

posto $u_1 = (0, 1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 0, 1, 0)$ e $u_1 = (0, 0, 0, 1)$ si ha che
$\mathcal{B} := \{v_1, u_1, u_2, u_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ che contiene $\mathcal{B}_1$
(d) Una base di W_1 può essere ottenuta dai vettori $w_1 := f(u_1)$, $w_2 := f(u_2)$ e $w_3 = f(u_3)$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}_{W_1} := \{(w_1, w_2, w_3)\}$ è una base di W_1.