Esercizi 7
3\05\2017

David Barbato

Esercizio 1. *Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ dell'esistenza di applicazioni lineari f da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ tali che:*

$$\begin{aligned} f((1,k,0)) = &\ (1+k^2,0) \\ f((1,2+k,0)) = &\ ((1+k)^2,2) \\ f((0,1,k-k^2)) = &\ (0,1+k^2) \end{aligned}$$

Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme S_k delle matrici $M \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ associate ad f rispetto alle basi caniniche.

Esercizio 2. *Si considerino i vettori $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$ e $v_3 = (1,1,1)$. Determinare (se esiste) la matrice M associata ad un'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(v_1) = (1,0)$, $f(v_2) = (2,0)$ e $f(v_3) = (3,0)$. Determinare la dimensione del nucleo di f e dell'immagine di f.*

Esercizio 3. *Si considerino i vettori $v_1 = (1,0,0)$ e $v_2 = (0,0,1)$ di $\mathbb{R}^3$. Esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(v_1) = (2,0)$, e $f(v_2) = (0,3)$? Determinare l'insieme delle matrici M associate alle eventuali applicazioni f. Determinare la dimensione del nucleo e dell'immagine di tali applicazioni.*

Esercizio 4. *Si considerino i vettori $v_1 = (1,0,3,0)$ $v_2 = (1,1,5,0)$ e $v_3 = (0,1,2,1)$ di $\mathbb{R}^4$. Esiste un'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(v_1) = (2,0)$, $f(v_2) = (0,3)$ e $f(v_3) = (0,4)$? Determinare l'insieme delle matrici M associate alle eventuali applicazioni f.*

Esercizio 5. *Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare. Sia $\mathcal{B}_1$ la base di $\mathbb{R}^3$ costituita dai vettori nell'ordine $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (1,-1,0)$ e $u_3 = (-1,-1,1)$ e sia $\mathcal{B}_2$ la base di $\mathbb{R}^2$ costituita dai vettori nell'ordine $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (2,1)$. Sia infine*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche. Calcolare i coefficienti della matrice $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}(f)$.

Esercizio 6. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *un'applicazione lineare. Sia* $\mathcal{B}$ *la base di* $\mathbb{R}^2$ *costituita dai vettori nell'ordine* $u_1 = (1, 2)$, $u_2 = (3, 5)$. *Sia infine*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

la matrice associata ad f *rispetto alla base canonica. Calcolare i coefficienti della matrice* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.

Soluzioni

Esercizio 1
Se $k = 1$ nessuna soluzione.
Se $k = 0$ infinite soluzioni:

$$S_{k=0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_{k=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Se $k \notin \{0, 1\}$ soluzione unica

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{1}{k-1} \\ 0 & 1 & \frac{k}{1-k} \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$dim(f(\mathbb{R}^3)) = Rank(M) = 1$.
Inoltre poiché deve valere $dim(f(\mathbb{R}^3)) + dim(ker(f)) = 3$ allora si ha: $dim(ker(f)) = 2$

Esercizio 3

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & b & 3 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

E' facile verificare che il rango della matrice $\begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & b & 3 \end{pmatrix}$ è 2 indipendentemente dai valori di a e b dunque: $dim(imm(f)) = 2$ e $dim(ker(f)) = 1$.

Esercizio 4

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2-3a & -2-2a & a & 2 \\ -3b & 3-2b & b & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Esercizio 5
$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Esercizio 6
$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$