Esercizi 8
15\05\2017
Esercizi numero 4 e 5 degli appelli 2014-2015 e 2015-2016

David Barbato

`L'esercizio 4 dell'appello 2 2014-2015 e l'esercizio 5 dell'appello 3 2015-2016 saranno accessibili dalla terza settimana di maggio.`

Appello 1 2014-2015

Esercizio 4.
Data la matrice A:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica e geometrica.

(b) Trovare, se esiste, una matrice $H \in GL_4$ tale che posto $D := H^{-1}AH$ si abbia D matrice diagonale.

Esercizio 5.
Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Sia $\mathcal{B}_1$ la base di $\mathbb{R}^2$ costituita dai vettori nell'ordine $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (1, -1)$ e sia $\mathcal{B}_2$ la base di $\mathbb{R}^3$ costituita dai vettori nell'ordine $w_1 = (1, 0, 0)$, $w_2 = (2, 0, 1)$ e $w_2 = (2, 1, 1)$. Sia infine

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche. Calcolare i coefficienti della matrice $A^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(f)$.

Appello 2 2014-2015

Esercizio 4.
Siano T e W i due sottospazi di $\mathbb{R}^4$ definiti da:
$T = \langle (4,4,3,0), (4,3,3,0), (4,-4,3,0) \rangle$
$W = \langle (3,3,4,0), (3,4,4,0), (3,-3,4,0) \rangle$.
Sia infine A la matrice associata alla proiezione ortogonale sullo spazio T.
(a) Stabilire se gli spazi T e W sono uguali.
(b) Trovare una base ortonormale per T.
(c) Calcolare i coefficienti della matrice A.

Esercizio 5.
Al variare di $t \in \mathbb{R}$ sia A_t la matrice seguente:

$$A_t := \begin{pmatrix} 4-t & 0 & t-2 \\ 2t-4 & t & 2-t \\ 2-t & 0 & t \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori di A_t e la loro molteplicità algebrica. (In funzione di t.)

(b) Per quali valori di t esiste una matrice $H \in GL_3$ tale che posto $D := H^{-1}AH$ si abbia D matrice diagonale?

Appello 3 2014-2015

Esercizio 4.
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare. Sia $\mathcal{B}_1$ la base di $\mathbb{R}^3$ costituita dai vettori nell'ordine $w_1 = (1,0,0)$, $w_2 = (1,0,1)$ e $w_3 = (2,1,1)$ e sia $\mathcal{B}_2$ la base di $\mathbb{R}^2$ costituita dai vettori nell'ordine $v_1 = (1,1)$, e $v_2 = (1,-1)$. Sia infine

$$A_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

la matrice associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$.
(a) Calcolare i coefficienti della matrice A associata ad f rispetto alle basi canoniche.
(b) Esiste un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g(v_1) = w_1$ e $g(v_2) = w_3$? E' unica? Se esiste ed è unica calcolare i coefficienti della matrice associata a g rispetto alle basi cononiche.
Esercizio 5.
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da:

$$f(x,y,z) = (x+y, 2x, x-z)$$

determinare se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f.

Appello 4 2014-2015

Esercizio 4. (V. 8 punti.)
Data la matrice A:

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica e geometrica.

(b) Trovare, se esiste, una matrice $H \in GL_4$ tale che posto $D := H^{-1}AH$ si abbia D matrice diagonale.

Esercizio 5. (V. 5 punti.)
Definiamo al variare di $t \in \mathbb{R}$ i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$

$$T_t := \langle (1,1,t,-t),(t,t,1,-1),(1,1,1,-1) \rangle$$

$$W_t := \langle (t,1,t,-1),(0,1-t,0,1-t),(1,1,1,-1) \rangle$$

(a) Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ si ha $dim(T_t) = 3$?

(b) Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ si ha $dim(W_t) = 2$?

(c) Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ si ha $T_t = W_t$?

(d) Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ si ha $dim(T_t \cap W_t) = 1$?

(e) Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ si ha $dim(T_t + W_t) = 4$?

Appello 1 2015-2016

Esercizio 4. (V. 6 punti.)
Data la matrice A:

$$A := \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ -4 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica e geometrica.

(b) Determinare gli autovettori di A.

(c) Trovare, se esiste, una matrice $H \in GL_4$ tale che posto $D := H^{-1}AH$ si abbia D matrice diagonale.

Esercizio 5. (V. 4 punti.)
Siano $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ due base di $\mathbb{R}^4$. Supponiamo che valgano le seguenti relazioni.

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0, 0, -1)_{\mathcal{B}_2} \\ v_2 &= (0, 2, 1, 1)_{\mathcal{B}_2} \\ v_3 &= (1, 1, 0, 1)_{\mathcal{B}_2} \\ v_4 &= (0, 1, 1, 0)_{\mathcal{B}_2} \end{aligned}$$

(a) Calcolare la matrice $A^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}$ di cambio di coordinate da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.
(b) Calcolare la matrice $A^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2}$ di cambio di coordinate da $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.

Appello 2 2015-2016

Esercizio 4. (V. 5 punti.)
Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice A è diagonalizzabile?

$$A := \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 - |t+1| & t + |t+1| & 1 \\ 0 & 0 & -(3+t) \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. (V. 4 punti.)
Sia f una applicazione lineare da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$. Consideriamo su $\mathbb{R}^2$ la base canonica $\mathcal{C}_2$ e la base $\mathcal{B}_2 := \{(1, 2), (3, 5)\}$ mentre su $\mathbb{R}^3$ siano $\mathcal{C}_3$ la base canonica e $\mathcal{B}_3$ la base $\mathcal{B}_3 := \{(1, 2, -3), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Supponiamo infine che si abbia $f(1, 2) = (1, 2, -3)$ e $f(3, 5) = (0, 0, 1)$.

(a) Determinare la matrice $A^{\mathcal{B}_3}_{\mathcal{B}_2}$ associata all'applicazione f rispetto alle basi $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$.

(b) Determinare la matrice $A^{\mathcal{C}_3}_{\mathcal{B}_2}$ associata all'applicazione f rispetto alle basi $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{C}_3$.

(c) Determinare la matrice $A^{\mathcal{B}_3}_{\mathcal{C}_2}$ associata all'applicazione f rispetto alle basi $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{B}_3$.

(d) Determinare la matrice $A^{\mathcal{C}_3}_{\mathcal{C}_2}$ associata all'applicazione f rispetto alle basi $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$.

Appello 3 2015-2016

Esercizio 4. (V. 6 punti.)
Al variare di $t \in \mathbb{R}$ sia A_t la matrice seguente:

$$A_t := \begin{pmatrix} 1 & t^2-2 & 1-t \\ 0 & 2 & t-1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori di A_t e la loro molteplicità algebrica.

(b) Per i valori di t per i quali esiste, determinare una matrice $H \in GL_3$ tale che posto $D := H^{-1}AH$ si abbia D matrice diagonale?

Esercizio 5. (V. 4 punti.)
Sia T il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1 = (0,0,3,4)$, $v_2 = (1,0,0,0)$ e $v_3 = (1,2,3,4)$.

(a) Determinare una base ortonormale per T.

(b) Determinare la matrice A associata alla proiezione ortogonale sul sottospazio T.

Appello 4 2015-2016

Esercizio 4. (V. 8 punti.)
Coinsideriamo la matrice A

$$A := \begin{pmatrix} 1 & t^2-1 & -t-1 & -t-1 \\ 0 & 1 & t+2 & t \\ 0 & 0 & 3+t & t \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

con $t \in \mathbb{R}$.
(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A.
(b) Trovre gli autovalori di A.
(c) Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice A è diagonalizzabile?
(d) Per i valori di t per i quali A è diagonalizzabile indicare gli eventuali autovettori.

Esercizio 5. (V. 2 punti.)
Sia f una applicazione lineare da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$. Supponiamo che valga $f((1,2)) = (3,4,5)$ e $f((2,3)) = (4,5,6)$. Calcolare gli elementi della matrice M associata all'applicazione f rispetto alle basi canoniche.

Soluzioni

Esercizio 4 (appello 2 2014-2015)
(a) Applichiamo il metodo di riduzione di Gauss Jordan alla matrice associata ai generatori di T e W.

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Gauss-Jordan} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Gauss-Jordan} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le matrici di Gauss-Jordan associate agli spazi vettoriali T e W sono diverse quindi T e W sono sottospazi diversi.
(b) Dalla riduzione di Gauss-Jordan otteniamo che $((1, 0, \frac{3}{4}, 0), (0, 1, 0, 0))$ è una base, osserviamo inoltre che i due vettori $(1, 0, \frac{3}{4}, 0), (0, 1, 0, 0)$ sono già ortogonali quindi per avere una base ortonormale basta renderli di norma 1.

$$\mathcal{B}_T = (v_1, v_2) \qquad \text{con } v_1 = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}, 0\right) \text{ e } v_2 = (0, 1, 0, 0)$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad v_1 \quad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad v_2 \quad \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{16}{25} & 0 & \frac{12}{25} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{12}{25} & 0 & \frac{9}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5 (appello 2 2014-2015)
Calcoliamo prima di tutti il polinomio caratteristico.

$$p(\lambda) = (t - \lambda)(2 - \lambda)^2$$

Occorre a questo punto distinguere due casi: $t = 2$ e $t \neq 2$.
(a) Se $t = 2$ c'è un solo autovalore $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica 3
Se $t \neq 2$ ci sono 2 autovalori: $\lambda_1 = t$ con molteplicità algebrica 1 e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica 2.
(b) CASO $t = 2$. Se $t = 2$ allora la matrice A_t diventa:

$$A_2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$$

La matrice A_2 è chiaramente diagonalizzabile (è già giagonale).
CASO $t \neq 2$. Riassumendo si ha:
$\lambda_1 = t$, m.a.$(\lambda_1) = 1$
$\lambda_2 = 2$, m.a.$(\lambda_2) = 2$
chiaramente si ha m.g.$(\lambda_1) = 1$, vediamo cosa succede per λ_2. Scriviamo prima di tutto la matrice $A_t - \lambda_2 I$ e riduciamo con Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 2-t & 0 & t-2 \\ 2t-4 & t-2 & 2-t \\ 2-t & 0 & t-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Gauss-Jordan} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il rango di $A_t - \lambda_2 I$ è 2 dunque si ha m.g.(λ_2)=1 quindi A_t non è diagonalizzabile per $t \neq 2$

Esercizio 4 (appello 3 2014-2015)
(a) Siano B_1 e B_2 le matrici associate alle basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice cercata è data da:

$$A = B_2 \cdot A_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \cdot B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -10 & -2 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

(b) Detoniamo con $C_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$ la matrice associata a g rispetto alle basi $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_1$ e denotiamo con C la matrice associata a g rispetto alle basi canoniche. La prima matrice è data dalle ipotesi:

$$C_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mentre C può essere ricavata come nel quesito precedente

$$C = B_1 \cdot C_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} \cdot B_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Un altro modo per risolvere l'esercizio poteva essere quello di scrivere la matrice associata alle equazioni: $g(1,1) = (1,0,0)$ e $g(1,-1) = (2,1,1)$ e poi ridurre con il metodo di Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Gauss-Jordan} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

e quindi

$$C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Esercizio 5 (appello 3 2014-2015)
La matrice A associata ad f è data da:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Procedendo come al solito calcoliamo il polinomio caratteristico

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$$

dunque ci sono due autovalori distinti $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$. L'autovalore λ_1 ha molteplicità algebrica 2. Per sapere se f ammette una base di autovettori occorre calcolare la molteplicità geometrica di λ_1.

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il Rango di $A - \lambda_1 I$ è 2 dunque la molteplicità geometrica di λ_1 è 1 e la funzione f non ammette una base di autovettori.

Esercizio 4 (appello 2 2015-2016)

$$|t+1| = \begin{cases} t+1 & \text{se } t+1 \geq 0 \\ -(t+1) & \text{se } t+1 < 0 \end{cases}$$

ovvero

$$|t+1| = \begin{cases} t+1 & \text{se } t \geq -1 \\ -t-1 & \text{se } t < -1 \end{cases}$$

considerando separatamente i due casi $t \geq -1$ e $t < -1$ si arriva al seguente risultato:
la matrice A è diagonalizzabile se e solo se:

$$t \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup \{0\}$$

Esercizio 5 (appello 2 2015-2016)
Consideriamo i seguenti vettori:

$$v_1 = (1,2),\ v_2 = (3,5) \qquad w_1 = (1,2,-3),\ w_2(1,1,0),\ w_3 = (0,0,1)$$

allora vale

$$\mathcal{B}_2 := \{v_1, v_2\} \qquad \mathcal{B}_3 := \{w_1, w_2, w_3\}$$

e quindi
$v_1 = (1,2)_{\mathcal{C}_2} = (1,0)_{\mathcal{B}_2}$

$v_2 = (3,5)_{\mathcal{C}_2} = (0,1)_{\mathcal{B}_2}$
$w_1 = (1,2,-3)_{\mathcal{C}_3} = (1,0,0)_{\mathcal{B}_3}$
$w_2 = (1,1,0)_{\mathcal{C}_3} = (0,1,0)_{\mathcal{B}_3}$
$w_3 = (0,0,1)_{\mathcal{C}_3} = (0,0,1)_{\mathcal{B}_3}$
Sia infine B la matrice di cambio di coordinate dalle base $\mathcal{B}_2$ alla base $\mathcal{C}_2$, e B^{-1} l'inversa di B. (La matrice B si può costruire mettendo in colonna i vettori $(1,2)$ e $(3,5)$ mentre la matrice inversa di B va calcolata!)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Le ipotesi sono

$$f(v_1) = w_1 \qquad f(v_2) = w_2$$

(a) Poiché per ipotesi $f((1,0)_{\mathcal{B}_2}) = (1,0,0)_{\mathcal{B}_3}$ e $f((0,1)_{\mathcal{B}_2}) = (0,0,1)_{\mathcal{B}_3}$ allora si ha:

$$A_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Per ipotesi $f((1,0)_{\mathcal{B}_2}) = (1,2,-3)_{\mathcal{C}_3}$ e $f((0,1)_{\mathcal{B}_2}) = (0,0,1)_{\mathcal{C}_3}$ allora si ha:

$$A_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{C}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{B}_3} = A_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3} B^{-1}$$

$$A_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(d)

$$A_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_3} = A_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{C}_3} B^{-1}$$

$$A_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -10 & 6 \\ 17 & -10 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4 (appello 3 2015-2016)
$p(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$
Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebriche rispettivamente 1 e 2. La molteplicità geometrica di $\lambda_1 = 1$ mentre per λ_2 vale la seguente uguaglianza:

$$m.g.(\lambda_2) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \neq 1 \\ 2 & \text{se } t = 1 \end{cases}$$

Nel caso $t \neq 1$ la matrice non si diagonalizza.
CASO $t = 1$:
$V_{\lambda_1} = \langle (1,0,0) \rangle$
$V_{\lambda_2} = \langle (1,-1,0)(0,0,1) \rangle$
Una matrice H che diagonalizza A è la seguente:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5 (appello 3 2015-2016)
Una possibile base ortonormale è $\mathcal{B}_T = \{u_1, u_2, u_3\}$ è data dai seguenti vettori:

$$u_1 = \left(0, 0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \qquad u_2 = (1,0,0,0) \qquad u_3 = (0,1,0,0)$$

La matrice A associata alla proiezione ortogonale è unica (non dipende dalla base trovata):

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{25} & \frac{12}{25} \\ 0 & 0 & \frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{pmatrix}$$