

# Esercizi 8

## 15\05\2017

David Barbato

**Esercizio 1.** *Data la matrice  $A$ :*

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Trovare, se esiste, una matrice  $H \in GL_3$  tale che posto  $D := H^{-1}AH$  si abbia  $D$  matrice diagonale.*

**Esercizio 2.** *Diagonalizzare, se possibile, la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 3.** *Discutere al variare di  $t \in \mathbb{R}$  la diagonalizzabilità della matrice  $A$  data da:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ t & 2 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 4.** *Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'endomorfismo definito da:*

$$f(x, y, z) = (y - z, x + 2z, 2z)$$

*si determini, se esiste, una base di  $\mathbb{R}^3$  costituita da autovettori di  $f$ .*

**Esercizio 5.** *Per quali valori di  $t \in \mathbb{R}$  la seguente matrice è diagonalizzabile?*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -t \\ 0 & t & 0 & 2t - t^2 \\ 0 & t - 2 & 2 & 2t - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

## Soluzioni

### Esercizio 1

$\det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)$ . Il polinomio caratteristico ha 3 autovalori reali distinti con molteplicità algebrica 1. Dunque la matrice  $A$  è diagonalizzabile. Siano  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -1$  e  $\lambda_3 = -2$  i tre autovalori. Gli autospazi  $V_{\lambda_j}$  sono uguali al  $\ker(A - \lambda_j I)$ . Per  $j = 1$  bisogna risolvere il sistema

$$(A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

risolvendo il sistema lineare omogeneo si ottiene

$$V_{\lambda_1} = \{(t, t, t) | t \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 1) \rangle$$

Per  $j = 2$  si ha  $\lambda_j = -1$  e dunque bisogna risolvere

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

risolvendo il sistema lineare omogeneo si ottiene

$$V_{\lambda_2} = \{(t, t, 0) | t \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 0) \rangle$$

Infine per  $j = 3$  si ha  $\lambda_j = -2$  e dunque bisogna risolvere

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

risolvendo il sistema lineare omogeneo si ottiene

$$V_{\lambda_3} = \{(2t, t, 0) | t \in \mathbb{R}\} = \langle (2, 1, 0) \rangle$$

tre autovettori relativi agli autovalori  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  sono dati da:  $v_1 = (1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (1, 1, 0)$  e  $v_3 = (2, 1, 0)$ . (la scelta degli autovettori chiaramente non è l'unica possibile.) Posto

$$B := \left( \begin{pmatrix} v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si ha

$$B^{-1} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

### Esercizio 2

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ . Il polinomio caratteristico ha un solo autovalore  $\lambda_1 = 1$  con molteplicità algebrica 2. Si ricava facilmente  $Rango(A - \lambda_1 I) = 1$  dunque la molteplicità geometrica di  $\lambda_1$  è uguale ad 1 ed  $A$  non è diagonalizzabile poiché la molteplicità geometrica è minore della molteplicità algebrica..

### Esercizio 3

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2t$ . Da cui ponendo il polinomio uguale a zero si ricava:

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{1 + 8t}}{2}$$

Bisogna considerare separatamente i casi  $1 + 8t > 0$ ,  $1 + 8t < 0$  e  $1 + 8t = 0$ .

Se  $1 + 8t > 0$  cioè  $t > -\frac{1}{8}$  allora ci sono due autovalori distinti con molteplicità algebrica 1 e dunque  $A$  è diagonalizzabile.

Se  $1 + 8t < 0$  cioè  $t < -\frac{1}{8}$  allora ci sono due autovalori distinti complessi con molteplicità algebrica 1 e dunque  $A$  è diagonalizzabile solo su  $\mathbb{C}$ .

Se infine  $1 + 8t = 0$  cioè  $t = -\frac{1}{8}$  allora la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{8} & 2 \end{pmatrix}$$

con autovalore  $\lambda_1 = \frac{3}{2}$  la matrice  $A - \lambda_1 I$  diventa:

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$Rango(A - \lambda_1 I) = 1$  e dunque poiché la molteplicità geometrica di  $\lambda_1$  è uguale ad uno mentre quella algebrica è 2 allora  $A$  non è diagonalizzabile.

### Esercizio 4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(-1 - \lambda)$ . Il polinomio caratteristico ha tre autovalori distinti  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = -1$  con molteplicità algebrica 1. Risolvendo il sistema

$$(A - \lambda_j I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

si ricavano tre autovettori  $v_1 = (1, 1, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1, 1)$  e  $v_3 = (1, -1, 0)$ .

### Esercizio 5 $t = -1$