Esercizi 9

22\05\2017

David Barbato

Esercizio 1. *Dato il sistema lineare:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

sia T lo spazio delle soluzioni determinare una base ortonormale di T .

Esercizio 2. *Indicare quali dei seguenti insiemi di vettori non sono basi ortonormali di R^4 . Giustificare la risposta.*

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right), \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right), \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\}$$

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

Soluzioni

Esercizio 1

La base di T non è unica una possibile soluzione si ottiene risolvendo prima il sistema lineare e ottenendo:

$$T = \{(-x_2 - x_4, x_2, 0, x_4) \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, 1) \rangle$$

a questo punto applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt si ottiene

$$\mathcal{B}_T = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 0, 2) \right\}$$

Esercizio 2

$\mathcal{B}_1$ non è una base ortonormale perché il terzo ed il quarto vettore non sono ortogonali.

$\mathcal{B}_2$ non è una base ortonormale perché i vettori non hanno norma 1.

$\mathcal{B}_3$ è una base ortonormale perché tutti i vettori hanno norma 1 e sono ortogonali tra di loro.