III Appello di Analisi Stocastica 2010/11	Cognome: ____________________
Laurea Magistrale in Matematica	Nome: ____________________
4 luglio 2011	Matricola: ____________________

Quando non è espressamente indicato il contrario, per la soluzione degli esercizi è possibile usare tutti i risultati visti a lezione (compresi quelli di cui non è stata fornita la dimostrazione).

Esercizio 1. Su uno spazio di probabilità filtrato standard $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}, \mathrm{P})$ è definito un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$-moto browniano reale $B = \{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$. Sia τ un tempo d'arresto tale che $\mathrm{E}(\sqrt{\tau}) < \infty$. L'obiettivo di questo esercizio è di mostrare che $\mathrm{E}(B_\tau) = 0$.

Ricordiamo che il processo $M = \{M_t := B_t^2 - t\}_{t\in[0,\infty)}$ è una martingala.

(a) Si mostri che $\mathrm{E}((B_{\tau\wedge a})^2) = \mathrm{E}(\tau \wedge a)$ per ogni $a \in [0, \infty)$.

(b) Si dimostri che, per ogni $t, a \geq 0$, vale l'inclusione di eventi

$$\left(\left\{\sup_{s\in[0,\infty)} |B_{\tau\wedge s}| > t\right\} \cap \{\tau \leq a\}\right) \subseteq \left\{\sup_{s\in[0,a]} |B_{\tau\wedge s}| > t\right\}$$

Si deduca che per ogni $t, a \geq 0$

$$\mathrm{P}\left(\sup_{s\in[0,\infty)} |B_{\tau\wedge s}| > t\right) \leq \mathrm{P}(\tau > a) + \mathrm{P}\left(\sup_{s\in[0,a]} |B_{\tau\wedge s}| > t\right). \tag{1}$$

(c) Si spieghi perché il processo $\{(B_{\tau\wedge s})^2\}_{s\in[0,\infty)}$ è una submartingala continua. Usando un'opportuna disuguaglianza, si mostri che per ogni $t, a \in [0, \infty)$

$$\mathrm{P}\left(\sup_{s\in[0,a]} (B_{\tau\wedge s})^2 > t^2\right) \leq \frac{\mathrm{E}(\tau \wedge a)}{t^2}.$$

Si deduca che, per ogni $t \in [0, \infty)$,

$$\mathrm{P}\left(\sup_{s\in[0,\infty)} |B_{\tau\wedge s}| > t\right) \leq \mathrm{P}(\tau > t^2) + \mathrm{E}\left(\frac{\tau}{t^2} \wedge 1\right). \tag{2}$$

(d) Si mostri che, per ogni $T \in [0, \infty)$,

$$\int_0^\infty 1_{\{T>t^2\}}\, \mathrm{d}t = \sqrt{T}, \qquad \int_0^\infty \left(\frac{T}{t^2} \wedge 1\right) \mathrm{d}t = 2\sqrt{T}.$$

Ricordando la formula $\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty \mathrm{P}(X > t)\, \mathrm{d}t$, valida per ogni variabile aleatoria positiva X, si deduca che

$$\mathrm{E}\left(\sup_{s\in[0,\infty)} |B_{\tau\wedge s}|\right) \leq 3\,\mathrm{E}(\sqrt{\tau}). \tag{3}$$

(e) Si mostri che $\lim_{s\to+\infty} B_{\tau\wedge s} = B_\tau$ q.c. e si giustifichi la relazione $\mathrm{E}(B_\tau) = \lim_{s\to+\infty} \mathrm{E}(B_{\tau\wedge s})$. Si spieghi perché $\mathrm{E}(B_{\tau\wedge s}) = 0$ per ogni $s \in [0, \infty)$ e si concluda che $\mathrm{E}(B_\tau) = 0$.

(f) Indichiamo con $\sigma := \inf\{t \in [0, \infty) : B_t = 1\}$ il primo istante in cui il moto browniano raggiunge il livello 1. Si mostri che $\mathrm{E}(\sqrt{\sigma}) = +\infty$.

Soluzione 1. (a) Applicando il teorema d'arresto per la martingala $M_t = B_t^2 - t$ e per il tempo d'arresto limitato $\tau \wedge a$, si ottiene $\mathrm{E}(M_{\tau\wedge a}) = \mathrm{E}(M_0) = 0$, ossia $\mathrm{E}(B^2_{\tau\wedge a}) = \mathrm{E}(\tau \wedge a)$. In maniera alternativa poiché $\tau \wedge a$ è tempo d'arresto allora $\{M_{\tau\wedge a}\}_{a\in[0,\infty)}$ è una Martingala, quindi $\mathrm{E}(M_{\tau\wedge a}) = \mathrm{E}(M_0) = 0$, ossia $\mathrm{E}(B^2_{\tau\wedge a}) = \mathrm{E}(\tau \wedge a)$.

(b) Se ω appartiene all'evento del membro sinistro, si ha che $\tau(\omega) \leq a$ e inoltre esiste $s \in [0, \infty)$ tale che $|B_{\tau(\omega)\wedge s}(\omega)| > t$. Dobbiamo mostrare che ω appartiene all'evento del membro destro, ossia che esiste $u \in [0, a]$ tale che $|B_{\tau(\omega)\wedge u}(\omega)| > t$. Nel caso in cui $s \leq a$, basta prendere $u = s$; se invece $s > a$, si ha $\tau(\omega) \wedge s = \tau(\omega) = \tau(\omega) \wedge a$ e dunque basta prendere $u = a$.

Scrivendo $A = (A \cap \{\tau > a\}) \cup (A \cap \{\tau \leq a\})$ per ogni evento $A \in \mathcal{F}$ e per ogni $a \in [0, \infty)$, e notando che $A \cap \{\tau > a\} \subseteq \{\tau > a\}$, dall'inclusione appena mostrata segue che

$$\left\{ \sup_{s\in[0,\infty)} |B_{\tau\wedge s}| > t \right\} = \left(\left\{ \sup_{s\in[0,\infty)} |B_{\tau\wedge s}| > t \right\} \cap \{\tau > a\} \right) \cup \left(\left\{ \sup_{s\in[0,\infty)} |B_{\tau\wedge s}| > t \right\} \cap \{\tau \leq a\} \right)$$
$$\subseteq \{\tau > a\} \cup \left\{ \sup_{s\in[0,a]} |B_{\tau\wedge s}| > t \right\} .$$

Usando la subadditività della probabilità, si ottiene la tesi.

(c) Dato che il moto browniano è una martingala, il processo $\{(B_s)^2\}_{s\in[0,\infty)}$ è una submartingala (continua), in quanto funzione convessa di una martingala di conseguenza anche il processo arrestato $\{(B_{\tau\wedge s})^2\}_{s\in[0,\infty)}$ è una submartingala.

$$\mathrm{P}\left(\sup_{s\in[0,a]} (B_{\tau\wedge s})^2 > t^2 \right) \leq \frac{\mathrm{E}((B_{\tau\wedge a})^2)}{t^2} = \frac{\mathrm{E}(\tau \wedge a)}{t^2} ,$$

dove l'uguaglianza è stata dimostrata in un punto precedente. Scegliendo $a = t^2$ e applicando la relazione (1), si ottiene allora la relazione (2), poiché

$$\frac{\mathrm{E}(\tau \wedge t^2)}{t^2} = \mathrm{E}\left(\frac{\tau \wedge t^2}{t^2} \right) = \mathrm{E}\left(\frac{\tau}{t^2} \wedge 1 \right) .$$

(d) Con semplici integrazioni si ottiene

$$\int_0^\infty 1_{\{T>t^2\}} \mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{T}} 1\, \mathrm{d}t = \sqrt{T} , \qquad \int_0^\infty \left(\frac{T}{t^2} \wedge 1 \right) \mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{T}} 1\, \mathrm{d}t + \int_{\sqrt{T}}^\infty \frac{T}{t^2}\, \mathrm{d}t = 2\sqrt{T} .$$

Usando la formula richiamata per il calcolo del valore atteso e il teorema di Fubini, dalla relazione (2) si ottiene

$$\mathrm{E}\left(\sup_{s\in[0,\infty)} |B_{\tau\wedge s}| \right) = \int_0^\infty \mathrm{P}\left(\sup_{s\in[0,\infty)} |B_{\tau\wedge s}| > t \right) \mathrm{d}t \leq \int_0^\infty \mathrm{P}(\tau > t^2)\, \mathrm{d}t + \int_0^\infty \mathrm{E}\left(\frac{\tau}{t^2} \wedge 1 \right) \mathrm{d}t$$
$$\leq \mathrm{E}\left(\int_0^\infty 1_{\{\tau>t^2\}}\, \mathrm{d}t \right) + \mathrm{E}\left(\int_0^\infty \left(\frac{\tau}{t^2} \wedge 1 \right) \mathrm{d}t \right) = 3\, \mathrm{E}(\sqrt{\tau}) .$$

(e) Dall'ipotesi $\mathbb{E}[\sqrt{\tau}] < \infty$ si deduce $\tau < +\infty$ quasi certamente. Per $\tau(w) < \infty$ si ha $\tau(\omega) \wedge s = \tau(\omega)$ per quasi ogni $s \geq \tau(\omega)$, dunque $\lim_{s\to\infty} \tau(\omega) \wedge s = \tau(\omega)$ per ogni $\omega \in \Omega$. Ponendo $Y := \sup_{s\in[0,\infty)} |B_{\tau\wedge s}|$, la relazione (3) mostra che $Y \in L^1$. Dato che $|B_{\tau\wedge s}| \leq Y$ per ogni $s \geq 0$, per convergenza dominata si ha che $\mathrm{E}(B_\tau) = \lim_{s\to\infty} \mathrm{E}(B_{\tau\wedge s})$. Abbiamo già osservato che il processo $\{B_{\tau\wedge s}\}_{s\in[0,\infty)}$ è una martingala, quindi $\mathrm{E}(B_{\tau\wedge s}) = \mathrm{E}(B_0) = 0$. Si ha allora $\mathrm{E}(B_\tau) = 0$.

(f) Dato che σ è un tempo d'arresto (tempo d'ingresso di un processo continuo e adattato in un insieme chiuso), se $\mathrm{E}(\sqrt{\sigma}) < \infty$ per quanto appena mostrato si avrebbe $\mathrm{E}(B_\sigma) = 0$, mentre per definizione di σ (e per continuità delle traiettorie di B) si ha $B_\sigma = 1$.

Esercizio 2. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}, \mathrm{P})$ uno spazio di probabilità filtrato standard su cui è definito un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$-moto browniano reale $B = \{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$. Consideriamo la seguente equazione differenziale stocastica:

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = X_t \,\mathrm{d}B_t \,-\, X_t \log X_t \,\mathrm{d}t \\ X_0 = 1 \end{cases} . \tag{4}$$

(a) È possibile applicare il teorema di esistenza e unicità di soluzioni per equazioni differenziali stocastiche visto a lezione?

(b) Supponiamo per il momento che esista un processo $X = \{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ che risolve l'equazione (4) e tale che $X_t > 0$ per ogni $t \in [0,\infty)$. Introduciamo un processo $Y = \{Y_t\}_{t\in[0,\infty)}$ ponendo

$$Y_t := e^t \log X_t \,.$$

Supponendo di poter applicare la formula di Ito per la funzione $(t,x) \mapsto e^t \log x$ (che non è definita su $[0,\infty) \times \mathbb{R}$ ma solo su $[0,\infty) \times (0,\infty)$), si calcoli il differenziale stocastico di Y e si mostri che

$$Y_t = \int_0^t e^s \,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}(e^t - 1)\,. \tag{5}$$

D'ora in avanti dimentichiamo le supposizioni fatte nel punto (b). Prendiamo la relazione (5) come *definizione* di un processo $Y = \{Y_t\}_{t\in[0,\infty)}$ e *definiamo* un processo $X = \{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ ponendo

$$X_t := e^{e^{-t} Y_t}\,. \tag{6}$$

(c) Dopo aver notato che $X_t > 0$ per ogni $t \in [0,\infty)$, applicando opportunamente la formula di Ito si dimostri che il processo X è soluzione dell'equazione differenziale stocastica (4).

(d) Ricordando la relazione (5), si calcolino $\mathrm{E}(Y_t)$ e $\mathrm{Var}(Y_t)$ e si deduca infine che

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}(\log X_t) = -\frac{1}{2}\,, \qquad \lim_{t\to\infty} \mathrm{Var}(\log X_t) = \frac{1}{2}\,.$$

[*Sugg.:* si osservi che $\log X_t = e^{-t} Y_t$.]

Soluzione 2. (a) No, perché la funzione $x \mapsto x \log x$ non è definita su tutta la retta reale (e ha crescita più che lineare all'infinito).

(b) Segue dall'equazione (4) che $\mathrm{d}\langle X\rangle_t = (X_t)^2 \,\mathrm{d}t$, per cui per la formula di Ito

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Y_t &= e^t \log(X_t)\,\mathrm{d}t \,+\, \frac{e^t}{X_t}\,\mathrm{d}X_t \,-\, \frac{1}{2}\frac{e^t}{(X_t)^2}\,\mathrm{d}\langle X\rangle_t \\ &= e^t \log(X_t)\,\mathrm{d}t \,+\, \frac{e^t}{X_t}\,(X_t\,\mathrm{d}B_t \,-\, X_t \log(X_t)\,\mathrm{d}t) \,-\, \frac{1}{2}\frac{e^t}{(X_t)^2}\,(X_t)^2\,\mathrm{d}t = e^t\,\mathrm{d}B_t \,-\, \frac{1}{2}e^t\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Dato che $Y_0 = \log X_0 = 0$, integrando da 0 a t si ottiene la formula cercata.

(c) Segue dalla definizione (5) che Y è un processo di Ito con differenziale stocastico

$$\mathrm{d}Y_t = e^t\,\mathrm{d}B_t \,-\, \frac{1}{2}\,e^t\,\mathrm{d}t\,.$$

Dato che $X_t = \Phi(t, Y_t)$ con $\Phi(t,y) = e^{e^{-t}y}$ funzione di classe (ben più che) $C^{1,2}$, possiamo applicare la formula di Ito. Dato che $\dot\Phi(t,y) = -e^{-t} y e^{e^{-t}y}$, $\Phi'(t,y) = e^{-t} e^{e^{-t}y}$ e $\Phi''(t,y) = e^{-2t} e^{e^{-t}y}$ e $\mathrm{d}\langle Y\rangle_t = e^{2t}\mathrm{d}t$, otteniamo

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= -e^{e^{-t}Y_t}\,Y_t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t \,+\, e^{e^{-t}Y_t}\,e^{-t}\,\mathrm{d}Y_t \,+\, \frac{1}{2}e^{e^{-t}Y_t}\,e^{-2t}\,\mathrm{d}\langle Y\rangle_t \\ &= -e^{e^{-t}Y_t}\,Y_t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t \,+\, e^{e^{-t}Y_t}\,e^{-t}\left(e^t\,\mathrm{d}B_t \,-\, \frac{1}{2}\,e^t\,\mathrm{d}t\right) \,+\, \frac{1}{2}e^{e^{-t}Y_t}\,e^{-2t}\,e^{2t}\,\mathrm{d}t \\ &= e^{e^{-t}Y_t}\,\mathrm{d}B_t \,-\, e^{e^{-t}Y_t}\,(e^{-t}\,Y_t)\,\mathrm{d}t \,=\, X_t\,\mathrm{d}B_t \,-\, X_t \log X_t\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Infine $X_0 = e^{e^{-0} Y 0} = 1$

(d) Dato che l'integrale stocastico di un processo in $M^2[0,t]$ ha media nulla, dalla relazione (5) si ottiene $\mathrm{E}(Y_t) = -\frac{1}{2}(e^t - 1)$. Di conseguenza, essendo $\log X_t = e^{-t} Y_t$,

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}(\log X_t) = \lim_{t\to\infty} e^{-t}\,\mathrm{E}(Y_t) = \lim_{t\to\infty} e^{-t}\left(-\frac{1}{2}(e^t - 1)\right) = -\frac{1}{2}\,.$$

Dato che $\mathrm{Var}(X + c) = \mathrm{Var}(X)$ per ogni variabile aleatoria $X \in L^2$ e per ogni costante $c \in \mathbb{R}$, ricordando l'isometria dell'integrale stocastico dalla relazione (5) si ottiene

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y_t) &= \mathrm{Var}\left(\int_0^t e^s\,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}(e^t - 1)\right) = \mathrm{Var}\left(\int_0^t e^s\,\mathrm{d}B_s\right) = \mathrm{E}\left[\left(\int_0^t e^s\,\mathrm{d}B_s\right)^2\right] \\ &= \int_0^t e^{2s}\,\mathrm{d}s = \frac{e^{2t} - 1}{2}\,,\end{aligned}$$

da cui segue che

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{Var}(\log X_t) = \lim_{t\to\infty} e^{-2t}\,\mathrm{Var}(Y_t) = \lim_{t\to\infty} e^{-2t}\,\frac{e^{2t} - 1}{2} = \frac{1}{2}\,.$$