I Appello di Analisi Stocastica 2010/11	Cognome: ____________
Laurea Magistrale in Matematica	Nome: ____________
22 marzo 2011	Matricola: ____________

Quando non è espressamente indicato il contrario, per la soluzione degli esercizi è possibile usare tutti i risultati visti a lezione (compresi quelli di cui non è stata fornita la dimostrazione).

Esercizio 1. Su uno spazio di probabilità filtrato standard $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}, \mathrm{P})$ è definito un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$-moto browniano reale $B = \{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$, che assumeremo per semplicità continuo (e non solo q.c. continuo). Introduciamo il sottoinsieme aleatorio $\Gamma = \Gamma(\omega) \subseteq [0,\infty)$ ponendo

$$\Gamma(\omega) := \{t \in [0,\infty) : \ B_t(\omega) = 1\}, \qquad \text{per } \omega \in \Omega .$$

Definiamo inoltre

$$\tau_s(\omega) := \inf\{t \in [s,\infty) : \ B_t(\omega) = 1\}, \qquad \text{per } s \geq 0\,, \ \omega \in \Omega\,,$$

con l'abituale convenzione $\inf \emptyset := +\infty$.

(a) Si mostri che $\Gamma(\omega)$ è un insieme chiuso, per ogni $\omega \in \Omega$.

(b) Per ogni $s \geq 0$, si mostri che q.c. si ha $\tau_s < \infty$ e inoltre $\tau_s \in \Gamma$.

(c) Per ogni $s \geq 0$, la variabile aleatoria τ_s è un tempo d'arresto per un risultato visto a lezione, in quanto tempo d'ingresso di un processo continuo e adattato in un insieme chiuso. Si dimostri che τ_s è un tempo d'arresto *senza usare tale risultato.*

[*Sugg.*: Per $s, t_0 \geq 0$ fissati, si scriva $\{\tau_s \leq t_0\} = \{S \in A\}$ per un'opportuna scelta di S (variabile aleatoria $\mathcal{F}_{t_0}$-misurabile) e A (sottoinsieme di $\mathbb{R}$).]

Ricordiamo che, dato un sottoinsieme $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$, un punto $t \in \Lambda$ si dice *isolato in* Λ se esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \cap \Lambda = \{t\}$.

(d) Fissiamo $s \geq 0$. Si dimostri che q.c. τ_s *non* è isolato in Γ, poiché esiste una successione (aleatoria) $\{t_n = t_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $t_n \downarrow 0$ q.c., tale che q.c. $\tau_s + t_n \in \Gamma$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

[*Sugg.*: Si applichi la proprietà di Markov forte.]

(e) Si spieghi perché vale la seguente inclusione:

$$\big\{\omega \in \Omega : \ \exists t \in \Gamma(\omega) \text{ isolato in } \Gamma(\omega)\big\} \subseteq \big\{\omega \in \Omega : \ \exists s \in \mathbb{Q}^+ \text{ tale che } \tau_s(\omega) \text{ è isolato in } \Gamma(\omega)\big\}\,.$$

(f) Si concluda che, per q.o. $\omega \in \Omega$, l'insieme $\Gamma(\omega)$ non ha punti isolati.

Soluzione 1. (a) Per ipotesi la funzione $t \mapsto B_t(\omega)$ è continua, per ogni $\omega \in \Omega$, quindi l'insieme $\Gamma(\omega)$ è chiuso in quanto controimmagine del sottoinsieme chiuso $\{1\}$.

(b) È noto che per q.o. $\omega \in \Omega$ si ha $\limsup_{t\to\infty} B_t(\omega) = +\infty$ e $\liminf_{t\to\infty} B_t(\omega) = -\infty$; da ciò segue in particolare che, per tali valori di ω, per ogni $s \geq 0$ esiste $t > s$ tale che $B_t(\omega) = 1$, quindi $\tau_s(\omega) < \infty$.

Si noti che $\tau_s(\omega) = \inf\{t \in [s,\infty) \cap \Gamma(\omega)\}$. Dato che l'estremo inferiore di ogni insieme chiuso non vuoto è un elemento dell'insieme, segue che $\tau_s(\omega) \in [s,\infty) \cap \Gamma(\omega)$ per q.o. $\omega \in \Omega$.

(c) Sia $t_0 \geq s \geq 0$. Ponendo $S := \sup_{t\in[s,t_0]} B_t = \sup_{t\in[s,t_0]\cap\mathbb{Q}} B_t$ e $I := \inf_{t\in[s,t_0]} B_t = \inf_{t\in[s,t_0]\cap\mathbb{Q}} B_t$ (per continuità delle traiettorie), si ha che S e I sono variabili aleatorie $\mathcal{F}_{t_0}$-misurabili. Dal fatto che $\{\tau_s \leq t_0\} = \{S \geq 1\} \cap \{I \leq 1\}$ segue che $\{\tau_s \leq t_0\} \in \mathcal{F}_{t_0}$, dunque τ_s è un tempo d'arresto.

(d) Per i punti precedenti τ_s è un tempo d'arresto q.c. finito, quindi il processo $\{X_u := B_{\tau_s+u} - B_{\tau_s} = B_{\tau_s+u} - 1\}_{u\geq 0}$ è un moto browniano (per ogni $s \geq 0$ fissato). È noto (per esempio per la legge del logaritmo iterato) che il moto browniano cambia segno infinite volte in ogni intorno destro dell'origine, quindi q.c. esiste $\{t_n = t_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $t_n \downarrow 0$ tale che $X_{t_n} = 0$, vale a dire $B_{\tau_s+t_n} = 1$, vale a dire $\tau_s + t_n \in \Gamma$.

(e) Se $t \in \Gamma(\omega)$ è isolato in $\Gamma(\omega)$, per definizione esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(t-\varepsilon, t) \cap \Gamma(\omega) = \emptyset$; di conseguenza, preso un qualunque razionale $s \in (t-\varepsilon, t)$, si ha $\tau_s(\omega) = t$ e dunque $\tau_s(\omega)$ è isolato in $\Gamma(\omega)$.

(f) Possiamo riformulare l'inclusione del punto precedente come

$$\{\Gamma \text{ ha almeno un punto isolato}\} \subseteq \bigcup_{s \in \mathbb{Q}^+} \{\tau_s \text{ è isolato in } \Gamma\}\,.$$

Dato che $\mathrm{P}(\tau_s \text{ è isolato in } \Gamma) = 0$ per ogni $s \geq 0$, per quanto mostrato nei punti precedenti, segue che $\mathrm{P}(\Gamma \text{ ha almeno un punto isolato}) = 0$.

Esercizio 2. Su uno spazio di probabilità filtrato standard $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,1)}, \mathrm{P})$ è definito un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,1)}$-moto browniano reale $B = \{B_t\}_{t\in[0,1)}$ (con insieme dei tempi ristretto a $[0,1)$). Definiamo i processi *continui* e adattati $M = \{M_t\}_{t\in[0,1)}$, $X = \{X_t\}_{t\in[0,1)}$ ponendo

$$M_t := \int_0^t \frac{1}{1-s}\, \mathrm{d}B_s\,, \qquad X_t := (1-t)\, M_t\,, \qquad \forall t \in [0,1)\,.$$

(a) Si mostri che il processo X è soluzione della seguente equazione differenziale stocastica:

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t \;=\; \mathrm{d}B_t - \dfrac{X_t}{1-t}\,\mathrm{d}t \\ X_0 \;=\; 0 \end{cases}, \tag{$\star$}$$

(b) Si mostri che, per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, il processo $\{X_t\}_{t\in[0,1-\varepsilon]}$ è l'*unica* soluzione (a meno di indistinguibilità) dell'equazione differenziale stocastica $(\star)$.

(c) Si calcoli $\mathrm{E}(M_t^2)$. Si deduca che $X_t \to 0$ in L^2 per $t \uparrow 1$.

(d) Fissiamo $\varepsilon \in (0,1)$. Si spieghi perché il processo $M^2 = \{M_t^2\}_{t\in[0,1-\varepsilon]}$ è una submartingala continua. Si deduca che per ogni $c > 0$ si ha

$$\mathrm{P}\left(\sup_{t\in[0,1-\varepsilon]} |M_t| > c \right) \;\le\; \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon\, c^2}\,.$$

[*Sugg.*: Si applichi un'opportuna disuguaglianza.]

Per $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\varepsilon_n := \frac{1}{2^n}\,, \qquad \Delta_n := \varepsilon_n \cdot \sup_{t\in[0,1-\varepsilon_n]} |M_t|\,.$$

(e) Si mostri che q.c. si ha $\Delta_n > (\varepsilon_n)^{1/4}$ solo per un numero finito di $n \in \mathbb{N}$. (Da ciò segue in particolare che $\Delta_n \to 0$ q.c. per $n \to \infty$.)

(f) Si mostri che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $t \in [1-\varepsilon_{n-1}, 1-\varepsilon_n]$ si ha $|X_t| \le 2\,\Delta_n$. Si deduca che $X_t \to 0$ q.c. per $t \uparrow 1$.

Soluzione 2. (a) Per definizione M è un processo di Itô con differenziale stocastico $\mathrm{d}M_t = \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}B_t$. Si noti che $X_t = F(t, M_t)$, con $F(t,x) := (1-t)x$. Dato che $\dot F(t,x) = -x$, $F'(t,x) = (1-t)$ e $F''(t,x) = 0$, applicando la formula di Itô si ottiene

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= \dot F(t, M_t)\,\mathrm{d}t + F'(t,M_t)\,\mathrm{d}M_t + \frac{1}{2}F''(t,M_t)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_t \\ &= -M_t\,\mathrm{d}t + (1-t)\,\mathrm{d}M_t = -\frac{X_t}{1-t}\,\mathrm{d}t + (1-t)\,\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}B_t\,, \end{aligned}$$

cioè proprio l'equazione $(\star)$.

(b) L'equazione differenziale stocastica $(\star)$ è della forma $\mathrm{d}X_t = \sigma(t,X_t)\,\mathrm{d}B_t + b(t,X_t)\,\mathrm{d}t$ con $\sigma(t,x) \equiv 1$ e $b(t,x) = -\frac{x}{1-t}$. Restringendo $t \in [0, 1-\varepsilon]$ sono dunque soddisfatte le ipotesi standard che garantiscono (l'esistenza di soluzioni forti e) l'unicità per traiettorie.

(c) Per l'isometria dell'integrale stocastico $\mathrm{E}(M_t^2) = \mathrm{E}(\int_0^t \frac{1}{(1-s)^2}\,\mathrm{d}s) = \frac{1}{1-t} - 1 = \frac{t}{1-t}$. Di conseguenza $\|X_t\|_2^2 = \mathrm{E}(X_t^2) = (1-t)^2\,\mathrm{E}(M_t^2) = (1-t)t \to 0$ per $t \uparrow 1$, cioè $X_t \to 0$ in L^2.

(d) Per ogni $\varepsilon \in (0,1)$ fissato, il processo $\{M_t\}_{t\in[0,1-\varepsilon]}$ è una martingala di quadrato integrabile, in quanto integrale stocastico del processo (deterministico!) $\{\frac{1}{1-t}\}_{t\in[0,1-\varepsilon]} \in M^2[0,1-\varepsilon]$. Dato che $x \mapsto x^2$ è una funzione convessa, segue che $\{M_t^2\}_{t\in[0,1-\varepsilon]}$ è una submartingala (continua per costruzione). Dalla disuguaglianza massimale si ottiene allora

$$\mathrm{P}\left(\sup_{t\in[0,1-\varepsilon]} |M_t| > c \right) = \mathrm{P}\left(\sup_{t\in[0,1-\varepsilon]} M_t^2 > c^2 \right) \le \frac{\mathrm{E}(M_{1-\varepsilon}^2)}{c^2} = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon\, c^2}\,,$$

poiché $\mathrm{E}(M_t^2) = \frac{t}{1-t}$ per il punto precedente.

(e) Usando le definizioni di Δ_n, ε_n e il punto precedente, si ottiene

$$\mathrm{P}\left(\Delta_n > (\varepsilon_n)^{1/4}\right) \,=\, \mathrm{P}\left(\sup_{t\in[0,1-\varepsilon_n]} |M_t| > (\varepsilon_n)^{-3/4}\right) \,\le\, \frac{1-\varepsilon_n}{\varepsilon_n\,(\varepsilon_n)^{-3/2}} \,\le\, (\varepsilon_n)^{1/2} \,=\, \frac{1}{(\sqrt{2})^n}\,,$$

quindi $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}\left(\Delta_n > (\varepsilon_n)^{1/4}\right) < \infty$. Per il lemma di Borel-Cantelli, q.c. si ha $\Delta_n > (\varepsilon_n)^{1/4}$ solo per un numero finito di $n \in \mathbb{N}$.

(f) Dato che $\varepsilon_{n-1} = 2\,\varepsilon_n$, si ha

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[1-\varepsilon_{n-1},1-\varepsilon_n]} |X_t| \,&=\, \sup_{t\in[1-\varepsilon_{n-1},1-\varepsilon_n]} |(1-t)M_t| \,\le\, \left(\sup_{t\in[1-\varepsilon_{n-1},1-\varepsilon_n]} |1-t|\right)\cdot\left(\sup_{t\in[0,1-\varepsilon_n]} |M_t|\right)\\ &=\, (1-(1-\varepsilon_{n-1}))\left(\sup_{t\in[0,1-\varepsilon_n]} |M_t|\right) \,=\, 2\,\varepsilon_n\left(\sup_{t\in[0,1-\varepsilon_n]} |M_t|\right) \,=\, 2\,\Delta_n\,.\end{aligned}$$

Per il punto precedente, q.c. $\Delta_n \to 0$ per $n \to \infty$, quindi per q.o. $\omega \in \Omega$ si ha che per ogni $\eta > 0$ esiste $n_0 = n_0(\omega) < \infty$ tale che $|\Delta_n(\omega)| < \frac{\eta}{2}$ per ogni $n > n_0(\omega)$. Per la stima appena mostrata, segue che $|X_t(\omega)| \le \eta$ per ogni $t \in [1-\varepsilon_{n-1}, 1-\varepsilon_n]$, qualunque sia $n > n_0(\omega)$, vale a dire $|X_t(\omega)| \le \eta$ per ogni $t \in [1-\varepsilon_{n_0(\omega)}, 1)$. Questo mostra che, per $t \uparrow 1$, $X_t(\omega) \to 0$; dunque $X_t \to 0$ q.c..