II Appello di Analisi Stocastica 2010/11	Cognome: ____________
Laurea Magistrale in Matematica	Nome: ____________
30 marzo 2011	Matricola: ____________

Dove non sia espressamente indicato il contrario, per la soluzione degli esercizi è possibile usare tutti i risultati visti a lezione (compresi quelli di cui non è stata fornita la dimostrazione).

Anche se non si è in grado di rispondere a una domanda, è possibile (e consigliato!) rispondere alle domande successive, dando per noti i risultati delle domande precedenti.

Esercizio 1. Su uno spazio di probabilità filtrato standard $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}, \mathrm{P})$ è definito un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$-moto browniano reale $B = \{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$, che assumeremo per semplicità continuo (e non solo q.c. continuo). Fissate delle costanti a, b reali, introduciamo le seguenti variabili aleatorie:

$$\tau_1 := \inf\{t \geq 0 : \ B_t = a\}\,, \qquad \tau_2 := \inf\{t \geq \tau_1 : \ B_t = b\}\,.$$

con l'abituale convenzione $\inf \emptyset := +\infty$. Denotiamo con Φ la funzione di ripartizione di una normale standard, cioè $\Phi(x) = \mathrm{P}(B_1 \leq x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

È noto che τ_1 è un tempo d'arresto.

(a) (*) Si mostri che $\{\tau_2 \leq t\} = \{L_t \leq R_t\}$, dove poniamo $L_t := \inf\{s \in [0, t] : B_s = a\}$ e $R_t := \sup\{s \in [0, t] : B_s = b\}$. Si spieghi perché L_t e R_t sono variabili aleatorie $\mathcal{F}_t$-misurabili e si concluda che anche τ_2 è un tempo d'arresto.

(b) Si mostri che per ogni $a \in \mathbb{R}$ vale $\mathrm{P}(\tau_1 \leq t) = 2\Phi(-\frac{|a|}{\sqrt{t}})$ per ogni $t > 0$.

(c) Si mostri che per $a > 0$ e $b > a$ vale $\mathrm{P}(\tau_2 \leq t) = 2\Phi(-\frac{b}{\sqrt{t}})$ per ogni $t > 0$.

(d) (*) Per $a > 0$ e $b > a$ sia $\widetilde{\tau}_2 := \inf\{t \geq \tau_1 : \ B_t = a - (b - a)\}$. Si mostri che vale l'uguaglianza $\mathrm{P}(\widetilde{\tau}_2 \leq t) = \mathrm{P}(\tau_2 \leq t)$ per ogni $t > 0$.
[*Sugg.*: Si applichi l'idea utilizzata per dimostrare il principio di riflessione.]

(e) Si deduca che per $a > 0$ e $b < a$ vale $\mathrm{P}(\tau_2 \leq t) = 2\Phi(-\frac{a+|b-a|}{\sqrt{t}})$ per ogni $t > 0$.

(f) Si concluda che per ogni valore di $a, b \in \mathbb{R}$ vale $\mathrm{P}(\tau_2 \leq t) = 2\Phi(-\frac{|a|+|b-a|}{\sqrt{t}})$ per ogni $t > 0$.

Soluzione 1. (a) La prima eguaglianza segue dalle definizioni di τ_1, τ_2, L_t e R_t: $\{\tau_2 \leq t\} = \{0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq t\} = \{\exists s_1, s_2 \in \mathbb{R} \text{ tali che } 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq t,\ B_{s_1} = a,\ B_{s_2} = b\} = \{L_t \leq R_t\}$. Mostriamo che L_t è una variabile $\mathcal{F}_t$-misurabile. Se $s \in [0, t]$ allora $\{L_t \in [0, s]\} = \{\tau_1 \leq s\} \in \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ inoltre $\{L_t = +\infty\} = \{\tau_1 \leq t\}^c \in \mathcal{F}_t$. La tesi segue dal fatto che L_t è a valori in $[0, t] \cup \{+\infty\}$ e la σ-algebra dei boreliani di $[0, t] \cup \{+\infty\}$ è generata dagli insiemi $[0, s]_{s\in[0,t]}$ e $\{+\infty\}$. Mostriamo che R_t è una variabile $\mathcal{F}_t$-misurabile. Se $s \in [0, t]$ allora

$$\{R_t \in [s, t]\} = \{B_u = b \text{ per qualche } u \in [s, t]\ \} = \{\inf_{u\in[s,t]}\{|B_u - b|\} = 0\}$$

$$= \left\{\inf_{u\in[s,t]\cap\mathbb{Q}}\{|B_u - b|\} = 0\right\} \in \mathcal{F}_t$$

inoltre $\{R_t = -\infty\} = \{R_t \in [0, t]\}^c \in \mathcal{F}_t$. La tesi segue dal fatto che R_t è a valori in $[0, t] \cup \{-\infty\}$ e gli insiemi $[s, t]_{s\in[0,t]}$, $\{-\infty\}$ generano la σ-algebra dei boreliani di $[0, t] \cup \{-\infty\}$. Osserviamo infine che $\{\tau_2 \leq t\} = \{L_t \leq R_t\} = \{L_t - R_t \leq 0\}$, poiché L_t e R_t sono $\mathcal{F}_t$ misurabili allora anche $L_t - R_t$ lo è e dunque $\{\tau_2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ e τ_2 è un tempo d'arresto.

(b) Se $a > 0$ dal principio di riflessione segue che $\mathrm{P}(\tau_1 \leq t) = 2\,\mathrm{P}(B_t \geq a) = 2\Phi(-\frac{a}{\sqrt{t}})$. Se $a = 0$ allora $\mathrm{P}(\tau_1 = 0) = 1 = 2\Phi(0)$. Se $a < 0$ poiché $\{-B_t\}_{t\geq 0}$ è distribuito come $\{B_t\}_{t\geq 0}$ si ha

$P(\tau_1 \leq t) = P(\tau_a \leq t) = P(\tau_{-a} \leq t) = 2\Phi(-\frac{-a}{\sqrt{t}})$. Dove τ_a (risp. τ_{-a}) indica il tempo di ingresso in a (risp. $-a$). Quindi in generale per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha $P(\tau_1 \leq t) = 2\Phi(-\frac{|a|}{\sqrt{t}})$.

(c) Se $0 \leq a \leq b$ allora $P(\tau_2 \leq t) = P(\tau_b \leq t) = 2\Phi(-\frac{b}{\sqrt{t}})$

(d) È noto che τ_1, tempo di ingresso in a, è quasi certamente finito. Sia $X = (X_t)_{t\geq 0}$ il processo definito da $X_t := B_{\tau_1+t} - B_{\tau_1}$, per la proprietà di Markov forte si ha che X è un moto browniano indipendente dalla σ-algebra $\mathcal{F}_{\tau_1}$ e quindi X_t è indipendente da τ_1. Si ha inoltre $B_{\tau_1+t} = X_t + B_{\tau_1} = X_t + a$. Scriviamo τ_2 e $\widetilde{\tau}_2$ in funzione di τ_1 e X.

$$\begin{aligned}\tau_2 &= \inf\{t \geq \tau_1 : B_t = b\} = \inf\{t + \tau_1 : t \geq 0,\ B_{\tau_1+t} = b\} \\ &= \inf\{t + \tau_1 : t \geq 0,\ X_t + a = b\} = \tau_1 + \inf\{t \geq 0 :\ X_t = b - a\}\end{aligned}$$

allo stesso modo si ricava

$$\widetilde{\tau}_2 = \tau_1 + \inf\{t \geq 0 :\ -X_t = b - a\}$$

Le condizioni $-X \sim X$, X indipendente da τ_1 e $-X$ indipendente da τ_1 sono condizioni sufficienti per affermare che (X, τ_1) e $(-X, \tau_1)$ hanno la stessa distribuzione congiunta da cui segue che τ_2 ha la stessa distribuzione di $\widetilde{\tau}_2$.

(e) Dai quesiti (d) e (c) possiamo dedurre che per ogni $a > 0$ e $\alpha > 0$ si ha:

$$\begin{aligned}&P(\{\exists s_1, s_2 \in \mathbb{R} | 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq t,\ B_{s_1} = a,\ B_{s_2} = a + \alpha\}) = \\ =&P(\{\exists s_1, s_2 \in \mathbb{R} | 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq t,\ B_{s_1} = a,\ B_{s_2} = a - \alpha\}) = \\ =&2\Phi\left(-\frac{a + \alpha}{\sqrt{t}}\right)\end{aligned}$$

Se poniamo $\alpha = a - b$ si ha

$$P(\tau_2 \leq t) = P(\{\exists s_1, s_2 \in \mathbb{R} | 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq t,\ B_{s_1} = a,\ B_{s_2} = a - \alpha\}) = 2\Phi\left(-\frac{a + |b - a|}{\sqrt{t}}\right)$$

(f) I casi $a = 0$ oppure $a = b$ sono banali perché τ_2 è uguale a τ_b tempo di ingresso in b. Il caso $a > 0$ si deduce in maniera diretta dalle domande precedenti. Resta da considerare il caso $a < 0$. Se $a < 0$ allora

$$\begin{aligned}P(\tau_2 \leq t) &= P(\{\exists s_1, s_2 \in \mathbb{R} | 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq t,\ B_{s_1} = a,\ B_{s_2} = b\}) \\ &= P(\{\exists s_1, s_2 \in \mathbb{R} | 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq t,\ -B_{s_1} = a,\ -B_{s_2} = b\}) \\ &= P(\{\exists s_1, s_2 \in \mathbb{R} | 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq t,\ B_{s_1} = -a,\ B_{s_2} = -b\}), \\ &= 2\Phi\left(-\frac{|a| + |b - a|}{\sqrt{t}}\right)\end{aligned}$$

Esercizio 2. Su uno spazio di probabilità filtrato standard $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}, \mathrm{P})$ è definito un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$-moto browniano reale $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$. Si consideri la seguente equazione differenziale stocastica per due processi reali $\{X_1(t)\}_{t\in[0,\infty)}$, $\{X_2(t)\}_{t\in[0,\infty)}$:

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_1(t) \;=\; X_2(t)\,\mathrm{d}B_t \,+\, \lambda\,X_1(t)\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}X_2(t) \;=\; -X_1(t)\,\mathrm{d}B_t \,+\, \lambda\,X_2(t)\,\mathrm{d}t \\ X_1(0) \;=\; 1 \\ X_2(0) \;=\; 0 \end{cases}, \tag{$\star$}$$

Poniamo $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$.

(a) Si scriva l'equazione differenziale stocastica nella forma

$$\mathrm{d}X(t) \;=\; \sigma(t, X(t))\mathrm{d}B_t \,+\, b(t, X(t))\,\mathrm{d}t$$

indicando esplicitamente le funzioni σ e b.

(b) Si mostri che, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $T > 0$, esiste un processo continuo ed adattato $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ definito su Ω che risolve $(\star)$ e che tale processo è unico a meno di indistinguibilità.

Supporremo d'ora in avanti che la soluzione $X = \{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ dell'equazione $(\star)$ sia definita per ogni $t \geq 0$. Definiamo quindi $M_t := X_1^2(t) + X_2^2(t)$.

(c) Si esprima la covariazione quadratica $\langle X, X\rangle_t$ in funzione di $X_1(t)$, $X_2(t)$.
[*Sugg.*: Si tratta di una matrice 2×2.]

(d) Il processo $M = \{M_t\}_{t\in[0,+\infty)}$ è un processo di Itô? Si scriva $M_t = \Phi(t, X(t))$ per un'opportuna funzione Φ e si calcolino $\dot{\Phi}$, Φ' e Φ''.
[*Sugg.*: Φ'' è una matrice 2×2.]

(e) Si mostri che $\mathrm{d}M_t = (2\lambda + 1)M_t\mathrm{d}t$ e si deduca che $M_t = e^{(2\lambda+1)t}$.

(f) Per $\lambda < -\frac{1}{2}$, si studi la convergenza puntuale e in L^p di $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ per $t \to \infty$.

Soluzione 2. (a)

$$\mathrm{d}\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2(t) \\ -X_1(t) \end{pmatrix}\mathrm{d}B_t + \begin{pmatrix} \lambda X_1(t) \\ \lambda X_2(t) \end{pmatrix}\mathrm{d}t$$

$\sigma(t, (x_1, x_2)) = (x_2, -x_1)$ e $b(t, (x_1, x_2)) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$

(b) Poichè σ e b non dipendono da t è sufficiente mostrare la loro lipschitzianità. La lipschitzianità di σ e b segue immediatamente dal fatto che sono operatori lineari da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$.

(c)

$$\mathrm{d}\langle X, X\rangle_t = \begin{pmatrix} X_2(t) \\ -X_1(t) \end{pmatrix} \cdot (X_2(t), -X_1(t))\,\mathrm{d}t = \begin{pmatrix} X_2^2(t) & -X_1(t)X_2(t) \\ -X_1(t)X_2(t) & X_1^2(t) \end{pmatrix}\mathrm{d}t$$

quindi

$$\langle X, X\rangle_t = \int_0^t \begin{pmatrix} X_2(s) \\ -X_1(s) \end{pmatrix} \cdot (X_2(s), -X_1(s))\,\mathrm{d}s = \begin{pmatrix} \int_0^t X_2^2(s)\mathrm{d}s & -\int_0^t X_1(s)X_2(s)\mathrm{d}s \\ -\int_0^t X_1(s)X_2(s)\mathrm{d}s & \int_0^t X_1^2(s)\mathrm{d}s \end{pmatrix}$$

(d)

$$M_t = \Phi(t, X(t)) \qquad \text{con} \qquad \Phi(t, (x_1, x_2)) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\dot{\Phi}(t, (x_1, x_2)) = 0 \qquad \Phi'(t, (x_1, x_2)) = (2x_1, 2x_2) \qquad \Phi''(t, (x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Infine M è un processo di Itô perché X è un processo di Itô e $\Phi \in C^{1,2}$.

(e) Per rispondere alla prima parte della domanda applichiamo la regola di Itô.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}M_t &= \Phi'(t, X(t))\mathrm{d}t + \Phi'(t, X(t)) \cdot \mathrm{d}X(t) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\Phi''(t, X(t)) \cdot \mathrm{d}\langle X, X\rangle_t\right) \\
&= +\ 2X_1(t)\,(X_2(t)\mathrm{d}B_t + \lambda X_1(t)\mathrm{d}t) +\ 2X_2(t)\,(-X_1(t)\mathrm{d}B_t + \lambda X_2(t)\mathrm{d}t) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2} \cdot 2X_2^2(t)dt + \frac{1}{2} \cdot 2X_1^2(t)dt \\
&= 0 \cdot \mathrm{d}B_t\ +\ (2\lambda + 1)X_1^2(t)\mathrm{d}t + (2\lambda + 1)X_2^2(t)\mathrm{d}t \\
&= (2\lambda + 1)M_t\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

La formula precedente ci dice che

$$M_t = 1 + \int_0^t (2\lambda + 1)M_t\mathrm{d}t$$

dove abbiamo usato $M_0 = 1$. Poiché $M = \{M\}_{t\geq 0}$ è q.c. una funzione continua in t allora l'integrale $\int_0^t (2\lambda + 1)M_t\mathrm{d}t$ è C^1 q.c. e dunque anche M è C^1. Il problema diventa

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_t & = (2\lambda + 1)M_t \\ M_0 & = 1 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $M_t = e^{(2\lambda+1)t}$.

(f) Innazitutto osserviamo che $||X(t)||^2 = M_t$. La condizione $\lambda < -\frac{1}{2}$ è equivalente a $2\lambda + 1 < 0$. Poiché q.c. $M_t = e^{(2\lambda+1)t}$ e $2\lambda + 1 < 0$ allora M_t tende a zero q.c. per t che tende all'infinito e dunque anche $||X(t) - 0|| = ||X(t)|| = M_t^{\frac{1}{2}}$ tende a zero q.c. per t che tende all'infinito. Allo stesso modo $\mathbb{E}[||X(t) - 0||^p] = \mathbb{E}[||X(t)||^p] = \mathbb{E}[M_t^{\frac{p}{2}}] = e^{\frac{p}{2}(2\lambda+1)t}$ tende a zero per t che tende all'infinito.