IV Appello di Analisi Stocastica 2010/11	Cognome: ______________
Laurea Magistrale in Matematica	Nome: ______________
16 settembre 2011	Matricola: ______________

Quando non è espressamente indicato il contrario, per la soluzione degli esercizi è possibile usare tutti i risultati visti a lezione (compresi quelli di cui non è stata fornita la dimostrazione).

Esercizio 1. Su uno spazio di probabilità filtrato standard $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}, \mathrm{P})$ è definito un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$-moto browniano reale $B = \{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$. Sia $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di variabili aleatorie definite per induzione da $\tau_0 = 0$ e $\tau_{n+1} = \tau_n + \min\{1, |1 - B_{\tau_n}|^4\}$

(a) Si dimostri che esiste $M > 0$ tale che $\mathrm{P}(|B_t| \le M\ \forall t \in [0,1]) > 0$.

(b) Si dimostri che, per ogni $\varepsilon > 0$, vale la disuguaglianza

$$\mathrm{P}\left(\sup_{t\in[0,\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^2]} |B_t| \le \varepsilon\right) > 0\,,$$

dove M è la costante del quesito (a).

(c) Si dimostri che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$\mathrm{P}\left(\sup_{t\in[0,\delta_\varepsilon]} |B_t| \le \frac{\varepsilon}{2},\ B_{\delta_\varepsilon} \in \left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) = \mathrm{P}\left(\sup_{t\in[0,\delta_\varepsilon]} |B_t| \le \frac{\varepsilon}{2},\ B_{\delta_\varepsilon} \in \left[-\frac{\varepsilon}{2}, 0\right]\right) > 0\,.$$

(d) Sia ε una costante positiva fissata, per ogni $n \in \mathbb{N}$ siano A_n^+ e A_n^- definiti nel modo seguente:

$$A_n^+ := \left\{\omega \in \Omega |\ \sup_{t\in[0,n\delta_\varepsilon]} |B_t| \le \varepsilon,\ B_{n\delta_\varepsilon} \in \left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right]\right\}$$

$$A_n^- := \left\{\omega \in \Omega |\ \sup_{t\in[0,n\delta_\varepsilon]} |B_t| \le \varepsilon,\ B_{n\delta_\varepsilon} \in \left[-\frac{\varepsilon}{2}, 0\right]\right\}$$

dove δ_ε è la costante del quesito (c). Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\mathrm{P}(A_n^+) = \mathrm{P}(A_n^-) > 0$.

(e) Ricordiamo che se τ è un tempo di arresto allora $\tau \wedge t$ è un tempo di arresto e il processo $\{B_{\tau\wedge t}\}_{t\in[0,\infty)}$ è una martingala. Si mostri che vale la seguente equivalenza

$$\tau_n + \min\{1, |1 - B_{\tau_n}|^4\} < t \qquad \text{se e solo se} \qquad (\tau_n \wedge t) + \min\{1, |1 - B_{\tau_n\wedge t}|^4\} < t.$$

Si mostri che se τ_n è un tempo di arresto allora per ogni $t \ge 0$ l'evento $\{\tau_{n+1} < t\}$ è $\mathcal{F}_t$ misurabile.

(f) Si mostri che se τ_n è un tempo di arresto allora anche τ_{n+1} lo è.

Soluzione 1. (a) Sia $X := \sup_{t\in[0,1]|B_t|}$ allora $\mathrm{P}(|B_t| \le M\ \forall t \in [0,1]) = \mathrm{P}(X \le M)$. Per la continuità delle traiettorie X è una v.a. quasi certamente finita. Dunque $\mathrm{P}(\cup_m\{X \le m\}) = 1$. Poiché gli eventi $\{X \le m\}$ sono crescenti in m si ha $\lim_{m\to\infty} \mathrm{P}(X \le m) = 1$ dunque a maggior ragiore esiste m tale che $\mathrm{P}(X \le M) > 0$.

(b) Sia $W = \{W_s\}_{s\in[0,\infty)}$ il moto browniano definito da $W_s = \frac{M}{\varepsilon} B_{s\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^2}$ ovvero posto $t = s\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^2$, $B_t = \frac{\varepsilon}{M} W_{t\left(\frac{M}{\varepsilon}\right)^2}$.

$\mathrm{P}\left(\sup_{t\in[0,\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^2]} |B_t| \le \varepsilon\right) = \mathrm{P}\left(\sup_{s\in[0,1]} \frac{\varepsilon}{M}|W_s| \le \varepsilon\right) = \mathrm{P}\left(\sup_{s\in[0,1]} |W_s| \le M\right) > 0\,.$
dove l'ultima disuguaglianza segue dal quesito (a)

(c) Sia $W = \{W_t\}_{t\in[0,\infty)}$ il moto browniano definito da $W_t = -B_t$. Poiché B e W hanno la stessa legge allora si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\sup_{t\in[0,\delta_\varepsilon]}|B_t| \le \tfrac{\varepsilon}{2},\ B_{\delta_\varepsilon} \in \left[0, \tfrac{\varepsilon}{2}\right]\right) &= \mathrm{P}\left(\sup_{t\in[0,\delta_\varepsilon]}|W_t| \le \tfrac{\varepsilon}{2},\ W_{\delta_\varepsilon} \in \left[0, \tfrac{\varepsilon}{2}\right]\right) = \\ &= \mathrm{P}\left(\sup_{t\in[0,\delta_\varepsilon]}|B_t| \le \tfrac{\varepsilon}{2},\ B_{\delta_\varepsilon} \in \left[-\tfrac{\varepsilon}{2}, 0\right]\right) \ . \end{aligned}$$

Poiché sappiamo che i due eventi hanno la stessa misura, per completare la dimostrazione sarà sufficiente mostrare che esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che la probabilità dell'unione sia positiva. Osserviamo innanzitutto che:

$$\left\{\sup_{t\in[0,\delta_\varepsilon]}|B_t| \le \frac{\varepsilon}{2},\ B_{\delta_\varepsilon} \in \left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right]\right\} \cup \left\{\sup_{t\in[0,\delta_\varepsilon]}|B_t| \le \frac{\varepsilon}{2},\ B_{\delta_\varepsilon} \in \left[-\frac{\varepsilon}{2}, 0\right]\right\} = \left\{\sup_{t\in[0,\delta_\varepsilon]}|B_t| \le \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

La disuguaglianza ricavata nel quesito (b) con $\frac{\varepsilon}{2}$ in luogo di ε ci da:

$$\mathrm{P}\left(\sup_{t\in[0,\delta_\varepsilon]}|B_t| \le \frac{\varepsilon}{2}\right) = \mathrm{P}\left(\sup_{t\in[0,\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^2]}|B_t| \le \frac{\varepsilon}{2}\right) > 0 \ .$$

Dove si è posto $\delta_\varepsilon = \left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^2$.

(d) Sia ancora $W = -B$. L'uguaglianz tra le due probabilità è immediata infatti:

$$\mathrm{P}(A_n^+) = \mathrm{P}\left(\sup_{t\in[0,n\delta_\varepsilon]}|W_t| \le \varepsilon,\ W_{n\delta_\varepsilon} \in \left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) = \mathrm{P}\left(\sup_{t\in[0,n\delta_\varepsilon]}|B_t| \le \varepsilon,\ B_{n\delta_\varepsilon} \in \left[-\frac{\varepsilon}{2}, 0\right]\right) = \mathrm{P}(A_n^-)$$

Procediamo ora per induzione su n il caso iniziale $n = 1$ è una banale conseguenza del risultato del quesito (c). Per mostrare il passo induttivo dobbiamo supporre $\mathrm{P}(A_n^+) > 0$ e provare che $\mathrm{P}(A_{n+1}^+) > 0$. Sarà sufficiente mostrare che $\mathrm{P}(A_{n+1}^+ \cup A_{n+1}^-) =$ $\mathrm{P}\left(\sup_{t\in[0,n\delta_\varepsilon]}|B_t| \le \varepsilon,\ |B_{n\delta_\varepsilon}| \le \frac{\varepsilon}{2}\right) > 0$. Sia ora $W = \{W_t\}_{t\in[0,\infty)}$ il moto browniano definito da $W_t = B_{t+n\delta_\varepsilon} - B_{n\delta_\varepsilon}$. Per la proprietà di Markov semplice W è un moto browniano ed è indipendente da $\mathcal{F}_{n\delta_\varepsilon}$. Sia D l'evento definito da $D := \{\sup_{t\in[0,\delta_\varepsilon]}|W_t| \le \frac{\varepsilon}{2},\ W_{\delta_\varepsilon} \in \left[-\frac{\varepsilon}{2}, 0\right]\}$. Per il quesito (c) si ha $\mathrm{P}(D) > 0$, per la proprietà di Markov si ha D indipendente da A_n^+, per l'ipotesi induttiva $\mathrm{P}(A_n^+)$ infine è facile verificare che $D \cap A_n^+ \subseteq A_{n+1}^+ \cup A_{n+1}^-$ dunque

$$\mathrm{P}(A_{n+1}^+ \cup A_{n+1}^-) \ge \mathrm{P}(D \cap A_n^+) = \mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}(A_n^+) > 0$$

(e) Cominciamo con l'equivalenza, possono verificarsi due casi $\tau_n \le t$ oppure $\tau_n > t$, nel primo caso si ha $\tau_n \wedge t = \tau_n$ e l'equivalenza è banalmente vera, nel secondo caso invece ($\tau_n > t$) le due disuguaglianze sono entrambe false e quindi sono equivalenti. Supponiamo ora che τ_n sia un tempo di arresto, vogliamo mostrare che $\{\tau_{n+1} < t\}$ è $\mathcal{F}_t$ misurabile.

$$\{\tau_{n+1} < t\} = \{\tau_n + \min\{1, |1 - B_{\tau_n}|^4\} < t\} = \{(\tau_n \wedge t) + \min\{1, |1 - B_{\tau_n \wedge t}|^4\} < t\}$$

Poiché sia $\tau_n \wedge t$ che $B_{\tau_n \wedge t}$ sono $\mathcal{F}_t$ misurabile allora anche la funzione $(\tau_n \wedge t) + \min\{1, |1 - B_{\tau_n \wedge t}|^4\}$ è $\mathcal{F}_t$ misurabile e dunque $\{\tau_{n+1} < t\}$ è un evento di $\mathcal{F}_t$

(f) Dobbiamo mostrare che $\{\tau_{n+1} \le t\}$ è un evento di $\mathcal{F}_t$. Per il risultato ottenuto in (e) abbiamo

$$\{\tau_{n+1} \le t\} = \cap_m \{\tau_{n+1} < t + \frac{\varepsilon}{m}\} \in \mathcal{F}_{t+\varepsilon} \qquad \forall \varepsilon > 0$$

quindi per la continuitá a destra della filtrazione vale $\{\tau_{n+1} \le t\} \in \mathcal{F}_t$.

Esercizio 2. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}, \mathrm{P})$ uno spazio di probabilità filtrato standard su cui è definito un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$-moto browniano reale $B = \{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$. Sia a positivo fissato e sia τ dato da:

$$\tau := \inf\{t \in [0, \infty) : \ |B_t| \geq a\} \tag{1}$$

Supponiamo che sia noto che τ è un tempo di arresto quasi certamente finito.

(a) Si spieghi perché valgono le uguaglianze $\mathrm{P}(B_\tau = -a) = \mathrm{P}(B_\tau = a) = \frac{1}{2}$ e si calcolino i momenti $\mathbb{E}[B_\tau]$, $\mathbb{E}[B_\tau^2]$, $\mathbb{E}[B_\tau^3]$, e $\mathbb{E}[B_\tau^4]$.

Introduciamo i processi $X = \{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ e $Y = \{Y_t\}_{t\in[0,\infty)}$ definiti da

$$X_t := B_t^2 - t \qquad Y_t := B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2 \,. \tag{2}$$

Assumiamo come noto che X e Y siano progressivamente misurabili.

(b) Applicando la formula di Ito, si mostri che X e Y sono processi di Ito, se ne calcoli il differenziale stocastico e si deduca che sono martingale (non solo martingale locali).

(c) Si dimostri che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\mathbb{E}[B_{\tau\wedge n}^2] = \mathbb{E}[\tau \wedge n]$.

(d) Si spieghi perché per n che tende all'infinito $\mathbb{E}[B_{\tau\wedge n}^2]$ converge a $\mathbb{E}[B_\tau^2]$.
Si spieghi perché per n che tende all'infinito $\mathbb{E}[\tau \wedge n]$ converge a $\mathbb{E}[\tau]$.
Si mostri che $\mathbb{E}[\tau] = \mathbb{E}[B_\tau^2] = a^2$.

(e) Si dimostri che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $3\mathbb{E}[(\tau \wedge n)^2] = \mathbb{E}[6(\tau \wedge n)B_{\tau\wedge n}^2 - B_{\tau\wedge n}^4]$.

(f) Si spieghi perché per n che tende all'infinito $\mathbb{E}[(\tau \wedge n)B_{\tau\wedge n}^2]$ converge a $\mathbb{E}[\tau B_\tau^2]$.
Si dimostri che $3\mathbb{E}[\tau^2] = \mathbb{E}[6\tau B_\tau^2 - B_\tau^4]$.
Quanto vale $\mathbb{E}[\tau^2]$?

Soluzione 2. (a) Sappiamo che τ è quasi certamente finito, per la continuità delle traiettorie si ha $P(\{B_\tau = -a\} \cup \{B_\tau = a\}) = P(B_\tau = -a) + P(B_\tau = a) = 1$. Basterà mostrare che le due probabilità sono uguali. Sia $W := -B$, sappiamo che W è un moto browniano e dunque $P(B_\tau = a) = P(W_\tau = -a) = P(B_\tau = -a)$. $\mathbb{E}[B_\tau] = \mathbb{E}[B_\tau^3] = 0$, $\mathbb{E}[B_\tau^2] = a^2$ e $\mathbb{E}[B_\tau^4] = a^4$.

(b) Consideriamo le funzioni $\Phi(t, x) = x^2 - t$ e $\psi(t, x) = x^4 - 6tx^2 + 3t^2$, esse sono $C^{\infty,\infty}$, hanno le seguenti derivate

$$\begin{aligned} &\dot\Phi(t, x) = -1 && \dot\psi(t, x) = -6x^2 + 6t \\ &\Phi'(t, x) = 2x && \psi'(t, x) = 4x^3 - 12tx \\ &\Phi''(t, x) = 2 && \psi''(t, x) = 12x^2 - 12t \end{aligned}$$

e vale $X_t = \Phi(t, B_t)$ e $Y_t = \psi(t, B_t)$. I processi X e Y sono di Ito e hanno i seguenti differenziali:

$$\mathrm{d}X = 2B_t\mathrm{d}B_t \qquad \mathrm{d}Y = (4B_t^3 - 12tB_t)\mathrm{d}B_t$$

$$X_t = \textstyle\int_0^t 2B_s\mathrm{d}B_s \qquad Y_t = \textstyle\int_0^t (4B_t^3 - 12tB_t)\mathrm{d}B_t \,.$$

Inoltre X e Y sono martingale locali e poiché gli integrandi sono in M^2 allora sono anche martingale.

$$\mathbb{E}\left[\int_o^t (4B_s^3 - 12sB_s)^2 \mathrm{d}s\right] = \int_o^t \mathbb{E}\left[(4B_s^3 - 12sB_s)^2\right]\mathrm{d}s \leq \int_o^t \mathbb{E}\left[(4^2|B_s|^6 + 12^2s^2|B_s|^2)\right]\mathrm{d}s < \infty$$

(c) Poiché τ è un tempo di arresto allora anche $\tau \wedge n$ è un tempo di arresto, inoltre $\tau \wedge n \leq n$ è limitato. Applicando il teorema di arresto alla martingala X con tempo di arresto $\tau \wedge n$ si ottiene $\mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[B_{\tau\wedge n}^2 - (\tau \wedge n)]$ la prima speranza è nulla mentre per la seconda vale $|B_{\tau\wedge n}^2| \leq a^2$. La v.a. $B_{\tau\wedge n}^2$ è limitata dunque integrabile, è allora possibile spezzare la speranza al secondo membro e si ottiene la tesi: $\mathbb{E}[B_{\tau\wedge n}^2] = \mathbb{E}[(\tau \wedge n)]$.

(d) Sappiamo che per n che tende all'infinito $B^2_{\tau\wedge n}$ converge quasi certamente a B^2_τ, inoltre $B^2_{\tau\wedge n} \le a^2$ dunque per il teorema di convergenza dominata si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[B^2_{\tau\wedge n}] = \mathbb{E}[B^2_\tau]\,.$$

La successione $\{\tau \wedge n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona non decrescente in n dunque per il teorema di convergenza monotona si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\tau \wedge n] = \mathbb{E}[\tau]\,.$$

Infine per quanto visto in (a) e (c) si ha $\mathbb{E}[\tau] = \mathbb{E}[B^2_\tau] = a^2$.

(e) Procediamo in maniera analoga a quanto visto per il quesito (c). Poiché τ è un tempo di arresto allora anche $\tau \wedge n$ è un tempo di arresto, inoltre $\tau \wedge n \le n$ è limitato. Applicando il teorema di arresto alla martingala Y con tempo di arresto $\tau \wedge n$ si ottiene $0 = \mathbb{E}[Y_0] = \mathbb{E}[B^4_{\tau\wedge n} - 6(\tau\wedge n)B^2_{\tau\wedge n} + 3(\tau \wedge n)^2]$, poiché $|\tau \wedge n|^2 \le n^2$ è limitato e quindi integrabile è possibile spezzare la speranza al secondo membro e si ottiene la tesi:

$$3\mathbb{E}[(\tau\wedge n)^2] = \mathbb{E}[6(\tau\wedge n)B^2_{\tau\wedge n} - B^4_{\tau\wedge n}]\,. \tag{3}$$

(f) Per n che tende all'infinito $(\tau\wedge n)B^2_{\tau\wedge n}$ converge a τB^2_τ quasi certamente. La successione $\{(\tau\wedge n)B^2_{\tau\wedge n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è dominata da τa^2 che sappiamo da (d) essere integrabile. Applicando nell'ordine il teorema di convergenza dominata, il teorema di convergenza dominata e il teorema di convergenza monotona si ottiene

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(\tau\wedge n)B^2_{\tau\wedge n}] = \mathbb{E}[\tau B^2_\tau] = a^4 < \infty\\
&\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[B^4_{\tau\wedge n}] = \mathbb{E}[B^4_\tau] = a^4 < \infty\\
&\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(\tau\wedge n)^2] = \mathbb{E}[\tau^2]
\end{aligned}$$

Facendo il limite per n che tende all'infinito dall'equazione (3) si ottiene:

$$3\mathbb{E}[\tau^2] = \mathbb{E}[6\tau B^2_\tau - B^4_\tau]\,.$$

e quindi $\mathbb{E}[\tau^2] = \frac{5}{3}a^4$.