Analisi Stocastica 2010/11 – Foglio di esercizi n. 1[†]

Esercizio 1. Siano X e S due variabili aleatorie reali *indipendenti*, tali che $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ mentre $\mathrm{P}(S=+1)=p$, $\mathrm{P}(S=-1)=1-p$, dove $p \in (0,1)$ è un parametro fissato. Definiamo $Z := SX$.

(a) Si mostri che $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

(b) (*) Si mostri che il vettore (X,Z) *non* è normale.

(c) Si mostri che le variabili X e Z *non* sono indipendenti.

[*Sugg.* Può essere utile usare l'identità $1 = \mathbb{1}_{\{S=1\}} + \mathbb{1}_{\{S=-1\}}$]

Esercizio 2. Data una variabile aleatoria reale $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, si calcoli $\mathrm{E}(e^{tX^2})$ per $t \in \mathbb{R}$.
[*Sugg.* Si usi la formula del cambio di variabili]

Esercizio 3. Siano $X_1,\ldots,X_n$ variabili aleatorie reali i.i.d. con legge $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. In altri termini $X := (X_1,\ldots,X_n) \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2 I_n)$. Definiamo $Y_k := \sum_{i=1}^k X_i$, per $1 \le k \le n$, cioè

$$Y_1 := X_1\,, \qquad Y_2 := X_1 + X_2\,, \qquad \ldots \qquad Y_n := X_1 + \ldots + X_n\,.$$

(a) Si mostri che $Y := (Y_1,\ldots,Y_n)$ è un vettore normale.

(b) Si determinino il vettore media μ e la matrice delle covarianze Γ di Y.

(c) (*) Si scriva la densità di Y.

[*Sugg.* Si noti che Y è una trasformazione lineare di X]

Esercizio 4. (a) Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in uno spazio topologico E. Supponiamo che esista $\overline{x} \in E$ tale che, per ogni sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, è possibile estrarre un'ulteriore sotto-sottosuccessione $\{x_{n'_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ che converge a $\overline{x}$. Si dimostri che l'intera successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\overline{x}$.
[*Sugg.* Si mostri che, per ogni aperto contenente $\overline{x}$, i termini x_n che non appartengono all'aperto sono necessariamente in numero finito.]

(b) Siano $X, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ variabili aleatorie reali. Supponiamo che, per ogni sottosuccessione di $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sia possible estrarre una sotto-sottosuccessione che converge a X in L^p (risp. in probabilità). Si mostri che allora la successione completa $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a X in L^p (risp. in probabilità).
[*Sugg.* Si applichi opportunamente il punto precedente.]

[†]Ultima modifica: 20 gennaio 2011.