Analisi Stocastica 2010/11 – Foglio di esercizi n. 2[†]

Esercizio 1. Sia $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vettore aleatorio a valori in $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che $X \in L^2$, che $\mathrm{E}(X) = 0$ (per semplicità) e che la matrice delle covarianze $\Gamma_{i,j} := \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ *non* sia invertibile ($\det(\Gamma) = 0$).

(a) Si esprima la quantità $\mathrm{E}(\langle u, X\rangle^2)$ in funzione di Γ, per $u \in \mathbb{R}^n$.

(b) Si mostri che esiste $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tale che $\mathrm{E}(\langle u, X\rangle^2) = 0$.

(c) (*) Si deduca che X non è assolutamente continuo.
[*Sugg.* Se X avesse una densità f_X, usando la formula del cambio di variabili si potrebbe scrivere $\mathrm{E}(\langle u, X\rangle^2) = \ldots$]

Esercizio 2. Sia $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ un moto browniano reale.

(a) Si mostri che per ogni $\alpha > 0$ esiste $0 < C_\alpha < \infty$ tale che $\mathrm{E}(|B_t|^\alpha) = C_\alpha\, t^{\alpha/2}$, per ogni $t \geq 0$.

(b) Si mostri che, assegnati arbitrariamente gli istanti $0 < t_1 < \ldots < t_k < \infty$ e gli intervalli aperti non vuoti $I_1, \ldots, I_k \subseteq \mathbb{R}$, si ha $\mathrm{P}(B_{t_1} \in I_1, \ldots, B_{t_k} \in I_k) > 0$.

(c) (*) Si mostri che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $C > 0$ tale che $\mathrm{P}(\sup_{t\in[0,1]} B_t > C) \leq \varepsilon$.

Esercizio 3. Sia $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un moto browniano reale. Definiamo gli eventi

$$A := \big\{\{B_t\}_{t\in[0,1]} \text{ è crescente}\big\}\,,$$
$$C_n := \big\{B_{i/2^n} - B_{(i-1)/2^n} \geq 0\,,\ \text{per ogni } 1 \leq i \leq 2^n\big\}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Si calcoli $\mathrm{P}(C_n)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(b) Si mostri che vale l'inclusione $A \subseteq C_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(c) Si deduca che $\mathrm{P}(A) = 0$. Quindi, q.c., il moto browniano non è crescente sull'intervallo $[0, 1]$.

(d) (*) Si dimostri che, q.c., il moto browniano non è crescente in nessun sotto-intervallo di $[0, 1]$.

[†]Ultima modifica: 14 febbraio 2011.