Analisi Stocastica 2010/11 – Foglio di esercizi n. 2†

Esercizio 1. Sia $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vettore aleatorio a valori in $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che $X \in L^2$, che $\mathrm{E}(X) = 0$ (per semplicità) e che la matrice delle covarianze $\Gamma_{i,j} := \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ *non* sia invertibile ($\det(\Gamma) = 0$).

(a) Si esprima la quantità $\mathrm{E}(\langle u, X\rangle^2)$ in funzione di Γ, per $u \in \mathbb{R}^n$.

(b) Si mostri che esiste $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tale che $\mathrm{E}(\langle u, X\rangle^2) = 0$.

(c) (*) Si deduca che X non è assolutamente continuo.
[*Sugg.* Se X avesse una densità f_X, usando la formula del cambio di variabili si potrebbe scrivere $\mathrm{E}(\langle u, X\rangle^2) = \ldots$]

Esercizio 2. Sia $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ un moto browniano reale.

(a) Si mostri che per ogni $\alpha > 0$ esiste $0 < C_\alpha < \infty$ tale che $\mathrm{E}(|B_t|^\alpha) = C_\alpha\, t^{\alpha/2}$, per ogni $t \geq 0$.

(b) Si mostri che, assegnati arbitrariamente gli istanti $0 < t_1 < \ldots < t_k < \infty$ e gli intervalli aperti non vuoti $I_1, \ldots, I_k \subseteq \mathbb{R}$, si ha $\mathrm{P}(B_{t_1} \in I_1, \ldots, B_{t_k} \in I_k) > 0$.

(c) (*) Si mostri che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $C > 0$ tale che $\mathrm{P}(\sup_{t\in[0,1]} B_t > C) \leq \varepsilon$.

Esercizio 3. Sia $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un moto browniano reale. Definiamo gli eventi

$$A := \big\{\{B_t\}_{t\in[0,1]} \text{ è crescente}\big\},$$
$$C_n := \big\{B_{i/2^n} - B_{(i-1)/2^n} \geq 0\,,\ \text{per ogni } 1 \leq i \leq 2^n\big\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Si calcoli $\mathrm{P}(C_n)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(b) Si mostri che vale l'inclusione $A \subseteq C_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(c) Si deduca che $\mathrm{P}(A) = 0$. Quindi, q.c., il moto browniano non è crescente sull'intervallo $[0,1]$.

(d) (*) Si dimostri che, q.c., il moto browniano non è crescente in nessun sotto-intervallo di $[0,1]$.

†Ultima modifica: 2 febbraio 2011.

Soluzione 1. (a) Dato che $\langle u, X\rangle = \sum_{i=1}^n u_i X_i$, si ha $\langle u, X\rangle^2 = \sum_{i,j=1}^n u_i u_j X_i X_j$ e dunque $\mathrm{E}(\langle u, X\rangle^2) = \sum_{i,j=1}^n u_i u_j\, \mathrm{E}(X_i X_j) = \sum_{i,j=1}^n u_i u_j \Gamma_{ij} = \langle u, \Gamma u\rangle$.

(b) Dato che $\mathrm{E}(\langle u, X\rangle^2) = \langle u, \Gamma u\rangle$, è sufficiente prendere $u \neq 0$ nel nucleo (kernel) della matrice Γ.

(c) Se X avesse una densità, potremmo scrivere

$$0 \;=\; \mathrm{E}(\langle u, X\rangle^2) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \langle u, x\rangle^2\, f_X(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Dato che $\langle u, x\rangle^2 f_X(x) \geq 0$, affinché l'integrale sia nullo è necessario che si abbia $\langle u, x\rangle^2 f_X(x) = 0$ quasi ovunque (rispetto alla misura di Lebesgue). Sia $V := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u, x\rangle = 0\}$ il sottospazio vettoriale ortogonale a u. Dato che $\langle u, x\rangle^2 > 0$ per $x \notin V$, deve necessariamente essere $f_X(x) = 0$ per quasi ogni $x \notin V$, in particolare $\int_{V^c} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Dato che però V è un sottospazio vettoriale di dimensione $n-1$, esso ha misura di Lebesgue zero, per cui anche $\int_V f_X(x)\,\mathrm{d}x := \int_{\mathbb{R}^n} f_X(x)\, 1_V(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Segue dunque che

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_V f_X(x)\,\mathrm{d}x \;+\; \int_{V^c} f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 0\,,$$

che è chiaramente impossibile, dovendo tale integrale dare 1.

Soluzione 2. (a) Per la proprietà di scaling del moto browniano, $B_t/\sqrt{t} \sim B_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$, dove $\sim$ indica l'uguaglianza in legge. Di conseguenza, posto

$$C_\alpha \;:=\; \mathrm{E}(|B_1|^\alpha) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha\, e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \;<\; \infty\,,$$

possiamo scrivere

$$\mathrm{E}(|B_t|^\alpha) \;=\; t^{\alpha/2}\, \mathrm{E}\left(\left|\frac{B_t}{\sqrt{t}}\right|^\alpha\right) \;=\; t^{\alpha/2}\, \mathrm{E}(|B_1|^\alpha) \;=\; C_\alpha\, t^{\alpha/2}\,.$$

Chiaramente $C_\alpha > 0$, mentre la proprietà $C_\alpha < \infty$ segue dal fatto ben noto che le variabili normali hanno momenti finiti di ogni ordine (oppure si mostra con una semplice stima nell'integrale).

(b) La densità $f_{t_1,\ldots,t_k}(x_1, \ldots, x_k)$ del vettore $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_k})$ è stata calcolata a lezione. In particolare, sappiamo che $f_{t_1,\ldots,t_k}(x_1, \ldots, x_k) > 0$ per ogni $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$. Dato che l'insieme $I_1 \times \ldots \times I_k$ ha parte interna non vuota, e dunque misura di Lebesgue positiva, si conclude che

$$\mathrm{P}(B_{t_1} \in I_1, \ldots, B_{t_k} \in I_k) \;=\; \int_{I_1\times\ldots\times I_k} f_{t_1,\ldots,t_k}(x_1, \ldots, x_k)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_k \;>\; 0\,.$$

(c) Introduciamo l'evento $C_n := \{\sup_{t\in[0,1]} B_t > n\}$ per $n \in \mathbb{N}$. Chiaramente la successione di eventi $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente, cioè $C_{n+1} \subseteq C_n$, e il loro limite è

$$C_\infty \;:=\; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \;=\; \left\{ \sup_{t\in[0,1]} B_t = +\infty \right\}.$$

Sappiamo che q.c. la funzione $t \mapsto B_t$ è continua, quindi $\sup_{t\in[0,1]} B_t < +\infty$ q.c., cioè $\mathrm{P}(C_\infty) = 0$. D'altro canto, per la continuità dall'alto della probabilità si ha che $\mathrm{P}(C_n) \to \mathrm{P}(C_\infty)$ per $n \to \infty$, e la conclusione segue.

Soluzione 3. (a) Si noti che $C_n = \bigcap_{i=1}^{2^n} \{B_{i/2^n} - B_{(i-1)/2^n} \geq 0\}$. Per definizione di moto browniano, gli incrementi $B_{i/2^n} - B_{(i-1)/2^n}$ hanno legge $\mathcal{N}(0, 1/2^n)$, da cui segue che $\mathrm{P}(B_{i/2^n} - B_{(i-1)/2^n} \geq 0) = \frac{1}{2}$, e sono indipendenti, per cui $\mathrm{P}(C_n) = \prod_{i=1}^{2^n} \mathrm{P}(B_{i/2^n} - B_{(i-1)/2^n} \geq 0) = (\frac{1}{2})^{2^n}$.

(b) Se $\omega \in A$, cioè la funzione $t \mapsto B_t(\omega)$ è crescente su $[0,1]$, si ha ovviamente $B_t(\omega) - B_s(\omega) \geq 0$ per ogni $0 \leq s \leq t \leq 1$, da cui $\omega \in C_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Da ciò segue l'inclusione $A \subseteq C_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(c) Per i punti precedenti, si ha che $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(C_n) = (\frac{1}{2})^{2^n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dato che $(\frac{1}{2})^{2^n} \to 0$ per $n \to \infty$, segue che $\mathrm{P}(A) = 0$.

(d) Dobbiamo mostrare che $\mathrm{P}(D) = 0$, dove abbiamo posto

$$D \;:=\; \big\{ \exists [a,b] \subseteq [0,1] \text{ t.c. } \{B_t\}_{t\in[a,b]} \text{ è crescente} \big\} \;=\; \bigcup_{0\leq a<b\leq 1} D_{[a,b]}\,,$$

$$D_{[a,b]} \;:=\; \big\{ \{B_t\}_{t\in[a,b]} \text{ è crescente} \big\}\,.$$

Con un argomento identico ai punti precedenti si mostra che $\mathrm{P}(D_{[a,b]}) = 0$, per ogni $0 \leq a < b \leq 1$. Essendo D un'unione di una famiglia più che numerabile di eventi, non è immediato concludere che $\mathrm{P}(D) = 0$. Tuttavia questo problema si risolve facilmente, notando che è possibile riscrivere l'evento D come unione *numerabile*:

$$D \;=\; \bigcup_{0\leq a'<b'\leq 1,\, a',b'\in\mathbb{Q}} D_{[a',b']}\,.$$

Infatti, se una traiettoria è crescente in un sottointervallo $[a,b]$ di $[0,1]$, basta prendere un sottointervallo $[a',b'] \subseteq [a,b]$ con $a',b' \in \mathbb{Q}$ e chiaramente la traiettoria è crescente anche su $[a',b']$, per cui $D_{[a,b]} \subseteq D_{[a',b']}$. Come abbiamo notato sopra, $\mathrm{P}(D_{[a',b']}) = 0$ e dunque $\mathrm{P}(D) = 0$.