

Esercizio 1. Sia $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un moto browniano reale.

- (a) Si mostri che $\int_0^1 B_t dt$ è una variabile aleatoria normale e se ne calcolino media e varianza.

[Sugg. Ricordarsi le somme di Riemann e il Teorema di Fubini]

- (b) (*) Si mostri che $\inf_{t \in [0,1]} B_t$ non è una variabile normale.

Esercizio 2. Sia $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ un moto browniano reale. Data una partizione $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = t\}$ dell'intervallo $[0, t]$, indichiamone il passo con $|\pi| = \max_{1 \leq i \leq k} (t_i - t_{i-1})$. Introducendo la variazione quadratica $S_\pi = \sum_{i=1}^k (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$ di B relativa a π , sappiamo che per $|\pi| \rightarrow 0$ si ha $S_\pi \rightarrow t$ in L^2 . Più precisamente, abbiamo visto che esiste una costante $0 < c < \infty$ universale tale che

$$\mathbb{E}[(S_\pi - t)^2] = c \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1})^2.$$

Sia $\{\pi^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di partizioni $\pi^{(n)} = \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_{k_n}^{(n)} = t\}$, tale che non solo $|\pi^{(n)}| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, ma anche $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\pi^{(n)}| < \infty$.

- (a) Si mostri che, per ogni $\varepsilon > 0$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|S_{\pi^{(n)}} - t| > \varepsilon) < \infty$.

[Sugg. Applicare un'opportuna disuguaglianza.]

- (b) (*) Si deduca che $S_{\pi^{(n)}} \rightarrow t$ q.c. per $n \rightarrow \infty$.

Esercizio 3 (Invarianza per rotazioni del moto browniano in $\mathbb{R}^n$).

- (a) Sia $B := \{B_t\}_{t \geq 0}$ un moto browniano n -dimensionale e sia L una matrice reale $n \times n$. Definiamo il processo $\beta := \{\beta_t\}_{t \geq 0}$ ponendo $\beta_t := LB_t$. Si mostri che β è un moto browniano n -dimensionale se e soltanto se $L \in O(n)$ (cioè L è ortogonale: $LL^* = L^*L = I_n$, dove L^* indica la trasposta di L).

- (b) Sia $B := \{B_t\}_{t \geq 0}$ un moto browniano n -dimensionale (con $n \geq 2$) e x, y vettori in $\mathbb{R}^n$ ortogonali di norma uno: $\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = 1$ e $\langle x, y \rangle = 0$, dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica il prodotto scalare standard. Si mostri che i processi stocastici $\{X_t := \langle x, B_t \rangle\}_{t \geq 0}$ e $\{Y_t := \langle y, B_t \rangle\}_{t \geq 0}$ sono due moti browniani reali indipendenti.

[†]Ultima modifica: 3 febbraio 2011.